

Théorie linéaire des perturbations cosmologiques

Julien Lesgourgues

Annecy, automne-hiver 2000/2001

Contents

1	Enjeux et motivations	2
2	Rappels de cosmologie homogène	3
3	Les transformations de jauge en relativité linéarisée	4
3.1	Introduction intuitive aux problèmes de jauge	4
3.2	Définition mathématique de la jauge	5
3.3	Comment étudier l'évolution des inhomogénéités dans l'Univers ?	7
4	Classification des perturbations de la métrique	8
4.1	Perturbations scalaires, vectorielles, tensorielles	8
4.2	Invariants de jauge de Bardeen	9
4.3	Jauge synchrone	9
4.4	Jauge longitudinale (ou newtonienne ou conforme)	10
4.5	Passage d'une jauge à l'autre	10
5	Equations d'Einstein et de conservation	11
5.1	Tenseur énergie-impulsion	11
5.2	Equations d'Einstein en jauge longitudinale	12
5.3	Equations d'Einstein en jauge synchrone	13
5.4	Equations de conservation	13
6	Solutions analytiques pour des modèles simplifiés de l'Univers	14
6.1	Univers contenant un seul fluide parfait	14
6.1.1	Univers avec de la radiation	15
6.1.2	Univers avec de la matière froide	16
6.2	Spectre primordial	16
6.3	Univers contenant plusieurs fluides parfait	17
6.4	Perturbations dans un Univers photons + CDM	18
6.4.1	Solution pour le fond	18
6.4.2	Comptage des solutions indépendantes	19
6.4.3	Perturbations adiabatiques	20
6.4.4	Perturbations isocourbes	23
6.5	<i>Comparaison avec les observations</i>	27
7	<i>Couplage photons-baryons, anisotropies du fond diffus</i>	<i>27</i>
8	<i>Influence des neutrinos</i>	<i>27</i>
9	<i>Influence d'une constante cosmologique</i>	<i>27</i>
10	<i>Génération des fluctuations par l'inflation</i>	<i>27</i>

1 Enjeux et motivations

Les principaux objectifs de cet exposé seront:

1. le calcul du spectre de densité des galaxies.

Nous montrerons comment calculer la répartition de la matière aux très grandes échelles (galaxies, amas...) pour des scénarios et des paramètres cosmologiques donnés.

Plus précisément, à partir d'une distribution continue de la matière $\rho(\vec{x}, t)$, on définira:

$$\bar{\rho}_m(t) = \langle \rho_m(\vec{x}, t) \rangle_{\vec{x}} \quad (1)$$

$$\delta\rho_m(\vec{x}, t) = \rho_m(\vec{x}, t) - \bar{\rho}_m(t) \quad (2)$$

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\delta\rho_m(\vec{x}, t)}{\bar{\rho}_m(t)} \quad (3)$$

$$\delta(\vec{k}, t) = \int \delta(\vec{x}, t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3\vec{x} \quad (4)$$

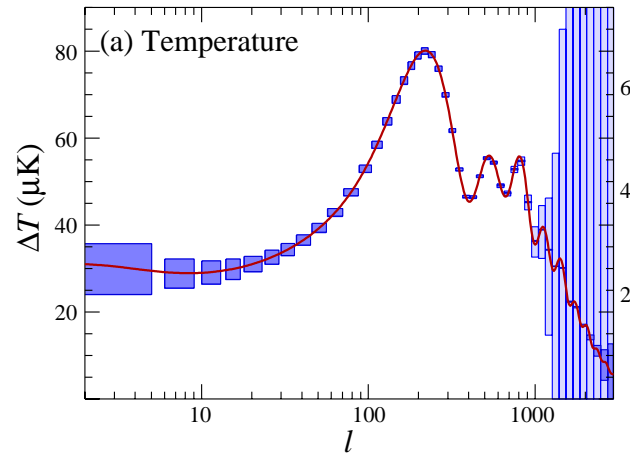
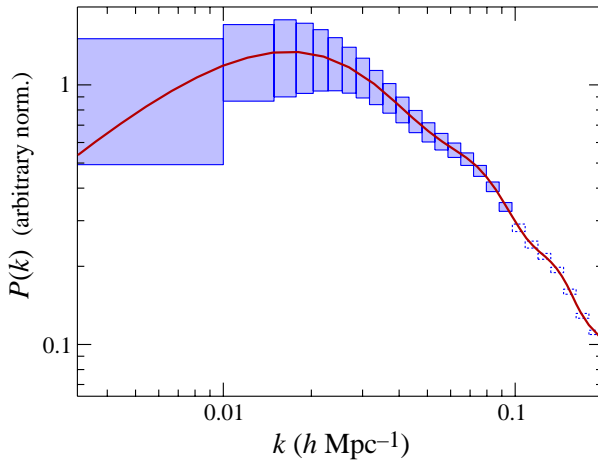
La théorie linéaire des perturbations ne prédit pas la valeur individuelle des modes $\delta(\vec{k}, t)$, mais leur distribution statistique. Comme nous le verrons plus loin, pour les scénarios courants, les $\delta(\vec{k}, t)$ sont des variables aléatoires indépendantes et gaussiennes, dont la variance ne dépend que du module k . Le carré de la variance est appelée *spectre de puissance* de la densité; on le note $P(k)$ lorsqu'il est évalué au temps présent ($t = t_0$):

$$P(k) = \left\langle \left| \delta(\vec{k}, t_0) \right|^2 \right\rangle \quad (5)$$

Nous verrons que le $P(k)$ a une forme caractéristique avec deux asymptotes et un maximum. La pente des asymptotes, l'échelle du maximum et la forme de la courbe entre les asymptotes peuvent être calculées précisément en fonction:

- d'hypothèses de base sur les fluctuations (origine active/passive, modes adiabatiques/isocourbes, spectre de puissance primordial), que l'on reliera aux modèles d'inflation ou de défauts topologiques ultérieurement.
- d'hypothèses sur la géométrie de l'univers et sa composition.

Toutes ces hypothèses sont décrites par un ensemble de paramètres: les paramètres cosmologiques. A l'heure actuelle, le nombre typique de paramètres nécessaire pour expliquer l'ensemble des observations est de l'ordre de 12.



A gauche, un exemple de spectre de puissance de densité $P(k)$, ainsi qu'une projection des barres d'erreurs expérimentales attendues pour le catalogue de galaxies SDSS. Aux grands k , les barres d'erreurs sont en pointillés, car les non-linéarités rendent la reconstruction du spectre plus hasardeuse. A droite, un exemple de spectre de puissance des anisotropies du CMB, avec les barres d'erreurs projetées pour le satellite MAP. Ces deux expériences devraient donner leurs résultats vers 2003-2005. Figures empruntées à Eisenstein, Hu & Tegmark [astro-ph/9807130].

Le $P(k)$ décrit une distribution continue de matière, avec des inhomogénéités d'ordre un. Pourtant, à l'échelle des planètes, des galaxies et des amas, la matière est discontinue, en raison des phénomènes d'effondrement

gravitationnel. Mais ces phénomènes n’influencent pas toutes les échelles de façon identique. Au cours de l’évolution de l’univers, l’effondrement gravitationnel a commencé par amplifier les perturbations aux plus petites échelles, puis à des échelles de plus en plus grandes.

En effectuant un lissage, on peut reconstruire un champ de densité continu à partir de la distribution discontinue des galaxies et des amas, et calculer ensuite un spectre de puissance. En pratique, les astrophysiciens utilisent des méthodes très sophistiquées pour décrire ces étapes.

Aux grandes échelles (typiquement, supérieures à 50-100 Mpc), l’univers est très homogène, et l’effondrement gravitationnel n’est pas intervenu. Donc, le spectre obtenu par lissage est directement interprétable comme le spectre de puissance linéaire défini ci-dessus. A des échelles plus petites, en raison de l’effondrement gravitationnel, les perturbations ont subi une amplification et une évolution non linéaire: on ne peut pas comparer directement le $P(k)$ reconstruit avec le $P(k)$ linéaire. Seules de grosses simulations numériques à N corps permettent de relier les deux. Contrairement à la théorie des perturbations linéaires, qui fournit pour chaque valeur des paramètres cosmologiques un résultat unique et précis, ces techniques ne sont ni très fiables, ni parfaitement maîtrisées.

Cependant, à des échelles intermédiaires, il existe des approximations linéaires (Press-Schechter) qui ne seront pas abordées ici.

2. le calcul des anisotropies du fond diffus.

L’évolution des anisotropies en température du rayonnement de fond diffus cosmologique (CMB) se déduit pratiquement des mêmes équations que l’évolution des perturbations de densité. Il suffit juste de traiter de manière plus complète l’équation de Boltzman qui décrit la distribution des photons dans l’espace des phases.

Ces anisotropies sont elles aussi caractérisées par un spectre de puissance (du moins pour les scénarios gaussiens habituels), exprimé non pas dans l’espace de Fourier, mais dans un développement en multipôles. Ce spectre de puissance est noté C_l .

Nous montrerons donc comment calculer les C_l , et comment ceux-ci dépendent des paramètres cosmologiques.

3. l’étude des mécanismes de génération des fluctuations.

Nous dirons quelques mots des défauts topologiques, mais nous étudierons principalement les mécanismes inflationnaires, qui donnent une explication aux conditions initiales des problèmes précédents (nature adiabatique/isocourbe, spectre et statistique des fluctuations primordiales), et qui relie précisément le spectre primordial aux paramètres du lagrangien de l’inflaton.

2 Rappels de cosmologie homogène

Dans tout ce qui suit, on se limite à un Univers spatialement plat (c’est le cas le plus favorisé par les observations récentes du fond diffus).

Pour décrire l’Univers dans l’approximation homogène, on prend donc la métrique Friedmann-Robertson-Walker FRW plate $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ et un tenseur d’énergie-impulsion diagonal $T_\mu^\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$ (ici ρ et p peuvent englober matière, rayonnement, constante cosmologique, champ scalaire, etc.). La conservation de l’énergie s’écrit:

$$\dot{\rho} a^3 + 3(\rho + p) \dot{a} a^2 = 0, \quad (6)$$

et les équations d’Einstein donnent la loi de Friedmann:

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (7)$$

Dans l’hypothèse où une seule composante (avec une équation d’état donnée $p = w\rho$) domine l’Univers, on a $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ et $a \propto t^{\frac{2}{3+3w}}$, c’est-à-dire, pour la domination de la radiation, de la matière ou d’une constante cosmologique Λ :

	w	$\rho(a)$	$a(t)$	$H(t)$
radiation	1/3	a^{-4}	$t^{1/2}$	$\frac{1}{2}t^{-1}$
matière	0	a^{-3}	$t^{2/3}$	$\frac{2}{3}t^{-1}$
Λ ou s.r.	$-1 + \epsilon$	$H_0 \sim \text{cte}$	$t^{N \rightarrow \infty}, e^{H_0 t}$	Nt^{-1}

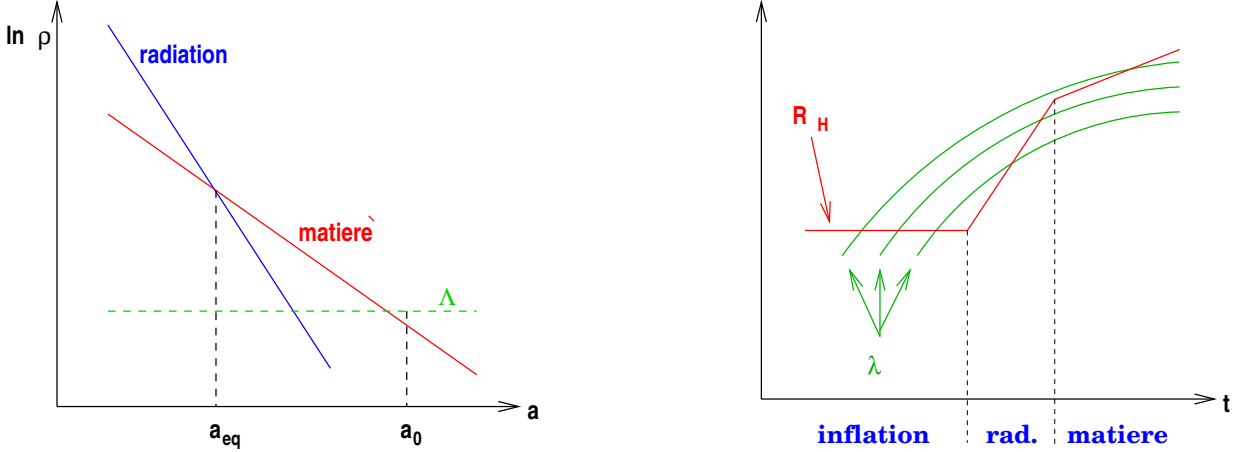
(s.r. signifie “champ scalaire en *slow-roll*”, c’est-à-dire avec $\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi)$.)

Dans la suite, nous allons introduire des perturbations et les décomposer en modes de Fourier comobiles \vec{k} . Les longueurs d’onde s’écrivent donc $\lambda(t) = a(t)2\pi/|\vec{k}|$.

Il est fondamental de comparer l'évolution des longueurs d'onde à celle du rayon de Hubble $R_H(t) = H(t)^{-1}$, c'est-à-dire, à la distance caractéristique au-delà de laquelle les effets de courbure spatio-temporelle sont importants. On remarque que $\lambda/R_H \propto \dot{a}$. Donc, lorsque l'expansion est accélérée (domination Λ /s.r.), les modes "sortent" du rayon de Hubble, et lorsque l'expansion est décélérée (domination radiation/matière), les modes "entrent" dans le rayon de Hubble.

Par conséquent, les modes de perturbations observables aujourd'hui sortent du rayon de Hubble lorsque l'on remonte l'histoire de l'Univers. Ceci est troublant car si après le Big Bang, la radiation domine déjà, le rayon de Hubble joue le rôle d'horizon causal. Or, les fluctuations ne peuvent pas avoir été engendrées de façon acausale.

Il faut donc qu'elles se forment: soit petit-à-petit, pendant la domination de la radiation et de la matière, et it à l'intérieur du rayon de Hubble; soit dans l'Univers primordial, pendant une phase d'expansion accélérée, avant de faire un aller-et-retour en-dehors du rayon de Hubble.



A gauche, $\ln \rho$ en fonction du facteur d'échelle. L'égalité radiation/matière se produit en a_{eq} . D'après les données récentes sur les supernovae, il y aurait une constante cosmologique, et l'instant présent a_0 serait situé légèrement après l'égalité matière/ Λ . A droite, on compare l'évolution du rayon de Hubble $R_H \propto a/\dot{a}$ avec un faisceau de trois longueurs d'onde comobiles $\lambda \propto a$.

3 Les transformations de jauge en relativité linéarisée

Puisque nous allons étudier des perturbations au voisinage, voire en-dehors du rayon de Hubble, nous devons utiliser un cadre relativiste. Or il y a une ambiguïté intrinsèque dans la notion de perturbations en relativité générale, qui est bien comprise et maîtrisée depuis un article très important de Bardeen (Phys. Rev. D 22 (1980) 1882). Il est impossible de comprendre l'évolution des perturbations cosmologiques aux grandes échelles sans connaître le problème des jauges et la définition des jauges newtonniennes et synchrones.

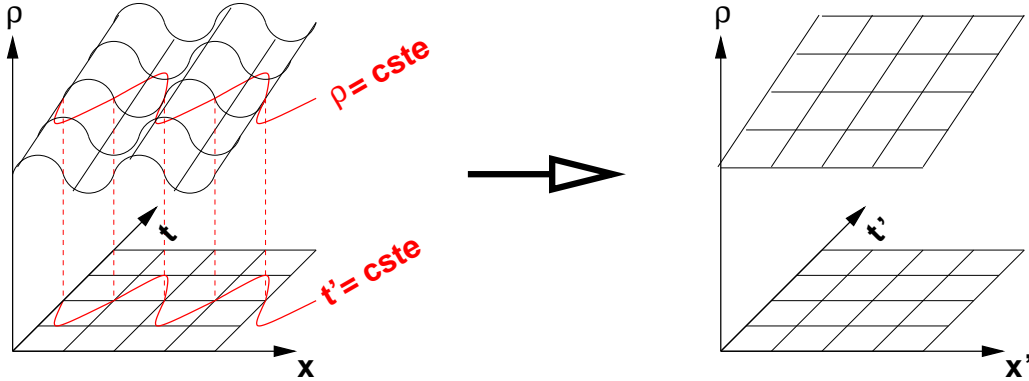
3.1 Introduction intuitive aux problèmes de jauge

En mécanique classique, si l'on a une quantité légèrement inhomogène comme un champ de densité $\rho(\vec{x}, t)$ ou de vitesse $\vec{v}(\vec{x}, t)$, on peut sans ambiguïté faire une décomposition en un fond homogène $(\bar{\rho}, \bar{v})$, plus une perturbation inhomogène ($\delta\rho = \rho - \bar{\rho}$, $\delta\vec{v} = \vec{v} - \bar{v}$). En effectuant cette décomposition, on a juste un degré de liberté: on peut redéfinir les quantités de fond en rajoutant des petites fonctions du temps: $\bar{\rho}(t) \rightarrow \bar{\rho}(t) + \epsilon(t)$, ce qui implique $\delta\rho(\vec{x}, t) \rightarrow \delta\rho(\vec{x}, t) - \epsilon(t)$. On obtient ainsi plusieurs décompositions tout aussi valables les unes que les autres, pourvu que $\epsilon(t) \ll \bar{\rho}(t)$. Cette ambiguïté triviale est levée si l'on impose une normalisation à chaque instant, par exemple: $\forall t, \bar{\rho}(t) \rightarrow \langle \rho(\vec{x}, t) \rangle_{\vec{x}}$.

En relativité générale, en revanche, il y a une ambiguïté profonde. En effet, en parlant de quantités de fond *homogène spatialement*, on privilégie une coordonnée, le temps, en contradiction avec la philosophie de la relativité générale: cette décomposition n'est pas covariante. La notion d'*homogénéité* dépend du système de coordonnées.

En réalité, en partant d'une distribution physique $\rho(\vec{x}, t)$, on peut à volonté changer de système de coordonnées de façon perturbative, c'est à dire redéfinir un nouveau système (\vec{x}', t') qui diffère du premier par des quantités d'ordre un. En raison de ces degrés de liberté supplémentaires, on peut aboutir à une foule de décomposition possible entre fond et perturbations; une même distribution physique de matière peut mener à des expressions différentes de $\delta\rho(\vec{x}, t)$, qui différeront non plus par une constante $\epsilon(t)$, mais par une fonction de t et de \vec{x} . Donc, la notion même de perturbation est ambiguë.

Donnons un exemple visuel. On voit sur le premier schéma ci-dessous une distribution de densité dans un certain système de coordonnées, par exemple $\rho(\vec{x}, t) = k t + \epsilon \sin x$. En faisant la moyenne sur x à chaque instant, on en déduit une partie homogène $\bar{\rho} = k t$, et par différence, des petites perturbations $\delta\rho = \epsilon \sin x$. Mais on peut également passer à un système de coordonnées dans lequel les hypersurfaces de simultanités (i.e. $t' = \text{cte}$) épousent les inhomogénéités apparentes de densité: il suffit de choisir $t' = t + (\epsilon/k) \sin x$. Dans le nouveau système, le champ de densité total est homogène, $\rho' = k t'$, et les perturbations sont nulles. On peut raisonner dans l'autre sens: à partir d'une distribution homogène, on arrivera à des perturbations inhomogènes. Or, dans notre problème, existe-t-il une raison physique de privilégier un système de coordonnées par rapport à un autre ?



Pour répondre, remarquons d'abord que ce problème est attaché à la possibilité de parler ou non de simultanéité dans l'espace-temps. Dans l'exemple précédent, on a vu que la définition des perturbations change lorsque l'on change les hypersurfaces de simultanéité. Intuitivement, un changement de coordonnées qui aurait laissé inchangée la décomposition de l'espace-temps en un ensemble d'hypersurfaces de simultanéité (i.e. $t' = t + f(t)$) n'aurait changé les perturbations de densité que par un $\epsilon(t)$ trivial, comme en mécanique classique.

En mécanique classique, les observateurs peuvent échanger instantanément des signaux lumineux, parler de simultanéité entre deux points de l'espace, et s'entendre sur la définition du temps. En relativité générale, ceci reste possible en très bonne approximation à l'intérieur du rayon de Hubble, car les observateurs peuvent toujours échanger des signaux lumineux, et la notion d'hypersurface de simultanéité reste à peu près définie. En revanche, à des échelles supérieures au rayon de Hubble, presque toutes les manières de découper l'espace-temps en hypersurfaces $t = \text{cte}$ sont équivalentes physiquement; nous avons dit presque, car par hypothèse les perturbations doivent rester petites devant le fond, mais tous les "petits" changements de coordonnées sont permis.

Cet argument purement intuitif se retrouvera ultérieurement au niveau des calculs: on verra que cette ambiguïté a des conséquences importantes dans les équations décrivant les longueurs d'onde supérieures au rayon de Hubble, tandis que pour les très petites longueurs d'ondes, elle est négligeable.

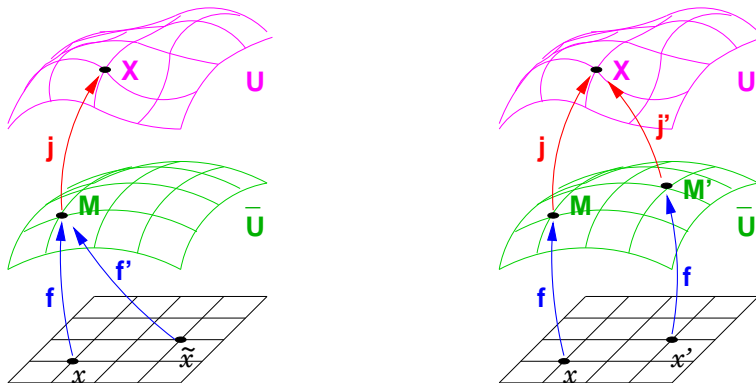
3.2 Définition mathématique de la jauge

On veut étudier l'espace-temps physique U , muni d'une carte F sur R^4 :

$$F : R^4 \rightarrow \bar{U} \tag{8}$$

$$x \mapsto X \tag{9}$$

Pour pouvoir linéariser les équations (en particulier l'équation d'Einstein), on est obligé de comparer U à un espace-temps de référence \bar{U} , homogène et isotrope, muni d'une carte f sur R^4 et d'une métrique FRW. Formellement, c'est seulement ainsi que l'on peut définir des perturbations. Ainsi, la perturbation de densité $\delta\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)$ est égale à la densité $\rho(\vec{x}, t)$ en X moins la densité $\bar{\rho}(\vec{x}, t)$ en M .



On peut décomposer la carte F en $F = j \circ f$, où j est un difféomorphisme entre U et \bar{U} , qui permet de comparer les quantités physiques aux quantités de fond, et de définir ainsi les perturbations.

Il est important de faire bien la différence entre un changement de coordonnées et une transformation de jauge. Changer simplement de système de coordonnées reviendrait à changer de carte f ; toutes les quantités sur U et \bar{U} subiraient une transformation sous le groupe de Lorentz. Ainsi, sur U , si $x \mapsto \tilde{x}$, la fonction de densité ρ devient $\tilde{\rho}(\tilde{x}) = \rho(x)$, le moment $\tilde{p}_\mu(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} p_\sigma(x)$, la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\mu\nu}(x)$. On a les mêmes lois de transformation pour les quantités de \bar{U} , et donc également pour les perturbations $\delta\rho$, δp_μ , $\delta g_{\mu\nu}$ (note: cette transformation n'a pas d'intérêt puisqu'elle enlève en général à \bar{U} son caractère homogène et isotrope).

Effectuer une transformation de jauge revient au contraire à changer la correspondance entre U et \bar{U} , en utilisant un autre difféomorphisme j' sans changer de carte f . Autrement dit, en choisissant un autre difféomorphisme, on effectue un changement de coordonnées sur U (dont la nouvelle carte devient $j' \circ f$) sans changer les coordonnées sur \bar{U} (dont la carte est toujours f). Ainsi, \bar{U} reste homogène et isotrope. Le changement de coordonnées induit sur U est:

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ j'^{-1} \circ j \circ f : R^4 &\rightarrow R^4 \\ x^\mu &\mapsto x'^\mu \end{aligned} \quad (10)$$

Après cette transformation, les quantités en X correspondent à la coordonnée x' au lieu de x , et elles ne sont pas comparées avec les quantités homogènes en M mais en M' . Par conséquent, les perturbations en X changent de façon plus complexe que sous un changement de coordonnées.

Soit $\epsilon^\mu = x'^\mu - x^\mu$. En traitant ϵ^μ comme une petite perturbation, regardons comment les différentes quantités se transforment à l'ordre un.

Transformation d'un scalaire de Lorentz

Prenons d'abord un scalaire de Lorentz quelconque: par exemple, la densité ρ . Avant la transformation, la perturbation au point physique X s'écrivait $\delta\rho(x) = \rho(x) - \bar{\rho}(x)$. Après transformation, elle vaudra $\delta\rho'(x') = \rho'(x') - \bar{\rho}'(x')$. Comme ρ est un scalaire de Lorentz, $\rho(x') = \rho(x)$ (la densité en un point physique donné est évidemment la même quel que soit le système de coordonnées). D'autre part, comme on a gardé le même système de coordonnées sur \bar{U} , on a $\bar{\rho}' = \bar{\rho}$. On en déduit:

$$\begin{aligned} \delta\rho'(x') &= \rho'(x') - \bar{\rho}'(x') \\ &= \rho(x) - \bar{\rho}(x') \\ &= \rho(x' - \epsilon) - \bar{\rho}(x') \\ &= \rho(x') - \epsilon^\mu \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu}(x') - \bar{\rho}(x') \\ \text{Donc } \delta\rho' &= \delta\rho - \epsilon^\mu \frac{\partial\rho}{\partial x^\mu} = \delta\rho - \epsilon^0 \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x^0}. \end{aligned} \quad (11)$$

(Note: ce calcul montre comment se transforme la fonction $\delta\rho$. On aurait pu poser une autre question: comment évolue la perturbation de densité en un point physique donné? Il faut alors calculer $\delta\rho'(x')$ en fonction de $\delta\rho(x)$:

$$\begin{aligned} \delta\rho'(x') &= \rho'(x') - \bar{\rho}'(x') \\ &= \rho(x) - \bar{\rho}(x') \\ &= \rho(x) - \bar{\rho}(x + \epsilon) \\ &= \delta\rho(x) - \epsilon^\mu \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial x^\mu}(x) \\ &= \delta\rho(x) - \epsilon^0 \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t}(x). \end{aligned} \quad (12)$$

A l'ordre un, les résultats (11) et (12) sont identiques. Ils ont une interprétation intuitive simple. Une transformation de jauge induisant un changement de coordonnées purement spatial, $\epsilon^0 = 0$, ne change pas la perturbation de densité, car sur l'espace-temps homogène, toutes les quantités en M et M' sont automatiquement égales (par définition d'un espace-temps homogène). Il est donc normal que ϵ^i n'intervienne pas. D'autre part, si la transformation de jauge ne change pas les hypersurfaces de simultanéité, alors $\epsilon^0(x) = \epsilon^0(t)$. La perturbation de densité est simplement renormalisée par une fonction dépendant du temps: c'est la transformation triviale vue en début de section).

Transformation d'un vecteur de Lorentz

Prenons un vecteur de Lorentz quelconque V_μ . Avant la transformation, la perturbation au point physique X s'écrivait $\delta V_\mu(x) = V_\mu(x) - \bar{V}_\mu(x)$. Après transformation, elle vaudra $\delta V'_\mu(x') = V'_\mu(x') - \bar{V}'_\mu(x')$. Comme V_μ est un

vecteur de Lorentz, $V'_\mu(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} V_\sigma(x)$. D'autre part, comme on a gardé le même système de coordonnées sur \bar{U} , $\bar{V}'_\mu = \bar{V}_\mu$. On en déduit:

$$\begin{aligned}
\delta V'_\mu(x') &= V'_\mu(x') - \bar{V}'_\mu(x') \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} V_\sigma(x) - \bar{V}_\mu(x') \\
&= \left(\delta_\mu^\sigma - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu}(x') \right) \left(V_\sigma(x') - \epsilon^\nu \frac{\partial V_\sigma}{\partial x^\nu}(x') \right) - \bar{V}_\mu(x') \\
&= V_\mu(x') - \epsilon^\nu \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu}(x') - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu}(x') V_\sigma(x') - \bar{V}_\mu(x') \\
\text{Donc } \delta V'_\mu(x') &= \delta V_\mu - \epsilon^\nu \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu} V_\sigma = \delta V_\mu - \epsilon^0 \frac{\partial \bar{V}_\mu}{\partial x^0} - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu} \bar{V}_\sigma
\end{aligned} \tag{13}$$

Transformation d'un tenseur de Lorentz

Prenons un tenseur de Lorentz quelconque $T_{\mu\nu}$. Avant la transformation, la perturbation au point physique X s'écrivait $\delta T_{\mu\nu}(x) = T_{\mu\nu}(x) - \bar{T}_{\mu\nu}(x)$. Après transformation, elle vaudra $\delta T'_{\mu\nu}(x') = T'_{\mu\nu}(x') - \bar{T}'_{\mu\nu}(x')$. Comme $T_{\mu\nu}$ est un vecteur de Lorentz, $T'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} T_{\sigma\tau}(x)$. D'autre part, comme on a gardé le même système de coordonnées sur \bar{U} , $\bar{T}'_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu}$. On en déduit:

$$\begin{aligned}
\delta T'_{\mu\nu}(x') &= T'_{\mu\nu}(x') - \bar{T}'_{\mu\nu}(x') \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\nu} T_{\sigma\tau}(x) - \bar{T}_{\mu\nu}(x') \\
&= \left(\delta_\mu^\sigma - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu}(x') \right) \left(\delta_\nu^\tau - \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\nu}(x') \right) \left(T_{\sigma\tau}(x') - \epsilon^\gamma \frac{\partial T_{\sigma\tau}}{\partial x^\gamma}(x') \right) - \bar{T}_{\mu\nu}(x') \\
&= T_{\mu\nu}(x') - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu}(x') T_{\sigma\nu}(x') - \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\nu}(x') T_{\mu\tau}(x') - \epsilon^\gamma \frac{\partial T_{\sigma\tau}}{\partial x^\gamma}(x') T_{\mu\nu}(x') - \bar{T}_{\mu\nu}(x') \\
\text{Donc } \delta T'_{\mu\nu} &= \delta T_{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu} T_{\sigma\nu} - \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\nu} T_{\mu\tau} - \epsilon^\gamma \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\gamma} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^\sigma}{\partial x^\mu} \bar{T}_{\sigma\nu} - \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\nu} \bar{T}_{\mu\tau} - \epsilon^0 \frac{\partial \bar{T}_{\mu\nu}}{\partial x^0}
\end{aligned} \tag{14}$$

Dérivée de Lie

Ces calculs se généralisent aisément à un quelconque tenseur d'ordre quelconque. Mathématiquement, ils correspondent à une dérivée de Lie selon le champ de vecteurs $\epsilon^\mu(x)$:

$$Q'^{\mu\dots} - Q^{\mu\dots} = \mathcal{L}_\epsilon Q^{\mu\dots} \tag{15}$$

3.3 Comment étudier l'évolution des inhomogénéités dans l'Univers ?

En ignorant tout des transformations de jauge, on pourrait se donner les perturbations les plus générales de la métrique FRW: $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2, -a^2, -a^2) + \delta g_{\mu\nu}$ (la partie perturbative $\delta g_{\mu\nu}$ contient 10 degrés de liberté), et décomposer de même les perturbations du tenseur énergie-impulsion pour chacune des composantes de l'Univers. L'étude des perturbations cosmologiques se ramènerait alors à la résolution des équations d'Einstein linéarisées et des différentes équations du mouvement.

On serait confronté à deux écueils. Premièrement, l'interprétation physique de certaines quantités serait ambiguë; par exemple, une perturbation croissante dans un système de coordonnées pourrait devenir décroissante après transformation de jauge. Deuxièmement, les solutions indépendantes d'un système d'équations différentielles ne seraient pas toutes physiques; certaines correspondraient à des degrés de liberté de jauge.

Approche invariante de jauge

En combinant entre elles plusieurs quantités, Bardeen a montré comment construire des variables et des équations d'évolution invariantes de jauge. Avec cette méthode, tous les résultats ont une interprétation physique immédiate.

Mais ces équations sont souvent par trop complexes.

Résolution dans une jauge fixée

Fixer une jauge revient à donner une prescription, par exemple sur la forme des perturbations de la métrique, qui limite les transformations de jauge, de telle sorte que les hypersurfaces de simultanéité sur U soient fixées une fois pour toutes.

On peut commencer par fixer une jauge, et résoudre un problème entièrement dans cette jauge. On élimine ainsi les degrés de liberté non physiques, et les équations peuvent être beaucoup plus simple que dans l'approche précédente si la jauge est judicieusement choisie. Par contre, il faut faire attention: pendant l'étude, l'interprétation de chaque perturbation est parfois simplement formelle et non physique. Mais cela n'a pas d'importance si a posteriori, on ré-exprime le résultat final en fonction de quantités physiques invariantes de jauge.

4 Classification des perturbations de la métrique

4.1 Perturbations scalaires, vectorielles, tensorielles

Dans un Univers spatialement plat, la métrique de fond est

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a(\eta)^2(d\eta^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) \quad (16)$$

(on a défini le temps conforme η par $dt = a d\eta$). La métrique perturbée la plus générale est alors:

$$ds^2 = a^2(\eta) [(1 + 2\phi)d\eta^2 + B_i dx^i d\eta - \{(1 - 2\psi)\delta_{ij} + H_{ij}\} dx^i dx^j], \quad \text{avec } H_{ii} = 0. \quad (17)$$

Il est d'usage de décomposer les vecteurs spatiaux comme B_i en partie longitudinale et transverse, $B_i = B_i^{\parallel} + B_i^{\perp}$:

$$\text{longitudinale } \forall i, \quad \epsilon_{ijk} \partial_j B_k^{\parallel} = \vec{\nabla} \times \vec{B}^{\parallel} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_i^{\parallel} = \partial_i b = \vec{\nabla} b \quad (1 \text{ deg. lib.}) \quad (18)$$

$$\text{transverse} \quad \partial_i B_i^{\perp} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_i^{\perp} = \epsilon_{ijk} \partial_j b_k = \vec{\nabla} \times \vec{b} \text{ avec } \partial_i b_i = 0 \quad (2 \text{ deg. lib.}) \quad (19)$$

(détail: on a imposé $\partial_i b_i = 0$, car si b_i avait une partie longitudinale, celle-ci ne contribuerait pas à B_i^{\perp} : $\vec{\nabla} \times \vec{b}^{\parallel} = 0$). Donc, on peut se restreindre à un vecteur \vec{b} purement transverse, c'est-à-dire de divergence nulle).

On décompose de même les tenseurs spatiaux de trace nulle comme H_{ij} : $H_{ij} = H_{ij}^T + H_{ij}^{\parallel} + H_{ij}^{\perp}$. Par définition, chaque composante est de trace nulle, H_{ij}^T est transverse, et les divergences de H_{ij}^{\parallel} et H_{ij}^{\perp} sont respectivement longitudinales et transverses:

$$\text{transverse} \quad H_{ii}^T = 0 \text{ et } \forall j, \quad \partial_i H_{ij}^T = 0 \quad (2 \text{ deg. lib.}) \quad (20)$$

$$\text{divergence longitudinale } H_{ii}^{\parallel} = 0 \text{ et } \forall i, \quad \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_l H_{kl}^{\parallel} = 0 \Rightarrow H_{ij}^{\parallel} = 2(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \mu \quad (1 \text{ deg. lib.}) \quad (21)$$

$$\text{divergence transverse} \quad H_{ii}^{\perp} = 0 \text{ et } \partial_i \partial_j H_{ij}^{\perp} = 0 \Rightarrow H_{ij}^{\perp} = \partial_i A_j + \partial_j A_i \text{ avec } \partial_i A_i = 0 \quad (2 \text{ deg. lib.}) \quad (22)$$

On va maintenant effectuer sur cette métrique une transformation de jauge en décomposant de la même manière la partie spatiale de ϵ_μ :

$$x'_0 = x_0 + \epsilon_0 \quad (23)$$

$$x'_i = x_i + \epsilon_i^{\parallel} + \epsilon_i^{\perp}, \quad \partial_i \epsilon_i^{\perp} = 0, \quad \epsilon_i^{\parallel} = \partial_i \beta. \quad (24)$$

On effectue une transformation de jauge. La nouvelle métrique est obtenue à partir de l'eq.(14) et peut être redécomposée de manière analogue. On obtient ainsi les lois de transformation :

$$2a^2 \phi' = 2a^2 \phi - 2 \frac{\partial \epsilon^0}{\partial \eta} \bar{g}_{00} - \epsilon^0 \frac{\partial \bar{g}_{00}}{\partial \eta} \Rightarrow \phi' = \phi - \dot{\epsilon}^0 - \frac{\dot{a}}{a} \epsilon^0 \quad (25)$$

$$\text{de même } \psi' = \psi + \frac{1}{3} \nabla^2 \beta + \frac{\dot{a}}{a} \epsilon^0 \quad (26)$$

$$B_i^{\parallel} = B_i^{\parallel} - \partial_i \epsilon^0 + \dot{\epsilon}_i^{\parallel} \Rightarrow b' = b - \epsilon^0 + \dot{\beta} \quad (27)$$

$$H_{ij}^{\parallel} = H_{ij}^{\parallel} - 2 \left(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \beta \Rightarrow \mu' = \mu - \beta \quad (28)$$

$$B_i^{\perp} = B_i^{\perp} + \dot{\epsilon}_i^{\perp} \quad (29)$$

$$H_{ij}^{\perp} = H_{ij}^{\perp} - (\partial_i \epsilon_j^{\perp} + \partial_j \epsilon_i^{\perp}) \quad (30)$$

$$H_{ij}^T = H_{ij}^T \quad (31)$$

On a donc trois secteurs complètement découplés:

1. H_{ij}^T est invariant de jauge. On appelle ces perturbations les *perturbations tensorielles*. Les deux degrés de liberté contenus dans H_{ij}^T sont les degrés de polarisation des ondes gravitationnelles.
2. les deux composantes \perp , qui contiennent 4 degrés de liberté, se transforment avec la partie transverse de ϵ^i , qui en contient deux. Ces 4 degrés de liberté non invariants de jauge sont appelés *perturbations vectorielles*.

3. ϕ , ψ et les deux composantes $||$, qui correspondent en tout à 4 degrés de liberté, se transforment avec ϵ^0 et la partie longitudinale de ϵ^i , qui correspondent en tout à 2 degrés de liberté. Ces 4 degrés de liberté non invariants de jauge sont appelés *perturbations scalaires*.

Nous avons montré que les perturbations tensorielles peuvent être étudiées sans se préoccuper des transformations de jauge. Les perturbations vectorielles demandent un traitement spécifique qui ne sera pas abordé ici, car ces perturbations ne jouent aucun rôle en cosmologie standard (avec de la matière ordinaire, elles tendent spontanément vers zéro). Voyons donc maintenant comment on peut étudier les perturbations scalaires.

4.2 Invariants de jauge de Bardeen

On peut combiner ϕ , ψ , $B_i^||$, $H_{ij}^||$ en deux variables indépendantes et invariantes de jauge. Tout d'abord, on remarque que:

$$\Delta(\phi - \dot{b} - \frac{\dot{a}}{a}b) = -\ddot{\beta} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta} \quad (32)$$

$$\Delta(\psi + \frac{\dot{a}}{a}b) = \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\beta} \quad (33)$$

(avec la notation $\Delta\phi = \phi' - \phi$, etc.). Comme $\Delta\mu = -\beta$, on obtient immédiatement les deux invariants de jauge suivants, appelés Φ_A et Φ_H dans les notations de Bardeen:

$$\Phi_A = \phi - \dot{b} - \frac{\dot{a}}{a}b - \ddot{\mu} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (34)$$

$$\Phi_H = -\psi - \frac{\dot{a}}{a}b - \frac{1}{3}\nabla^2\mu - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (35)$$

4.3 Jauge synchrone

C'est l'«ancienne» jauge, utilisée dans les travaux des années 70-80. Elle découle de la prescription:

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ d\eta^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j \} . \quad (36)$$

On remarque que cette jauge est appropriée pour décrire simultanément scalaires, tenseurs et vecteurs: si h_{ij} est quelconque, il contient 2 deg. lib. scalaires ($h = h_{ii} = -6\psi$ et μ), 2 deg. lib. vectoriels et 2 deg. lib. tensoriels. Si l'on souhaite étudier uniquement les perturbations scalaires, on se restreint à

$$h_{ij} = \frac{h}{3}\delta_{ij} + 2(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\mu. \quad (37)$$

Traditionnellement, au lieu de μ , on utilise le degré de liberté η tel que

$$2\nabla^2\mu = 6\eta + h . \quad (38)$$

On a alors, dans l'espace de Fourier:

$$-2k^2\mu = 6\eta + h , \quad (39)$$

$$h_{ij} = \frac{h}{3}\delta_{ij} - 2(k_i k_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}k^2)\mu = \hat{k}_i \hat{k}_j h + (\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})6\eta . \quad (40)$$

Le comptage des degrés de liberté donne l'impression que les degrés de liberté non physiques ont été éliminés. Cependant, la manière rigoureuse de fixer la jauge est de fixer les hypersurfaces de simultanéité. Examinons donc la liberté résiduelle lorsque la prescription a été imposée. On est toujours libre d'effectuer des changements de coordonnées tels que ϕ , $B_i^||$ et B_i^\perp restent nuls, i.e.:

$$\epsilon^0 + \frac{\dot{a}}{a}\epsilon^0 = 0 \quad (41)$$

$$\partial_i\epsilon^0 - \partial_i\dot{\beta} = 0 \quad (42)$$

$$\dot{\epsilon}_i^\perp = 0 \quad (43)$$

Or, pour ne pas changer les hypersurfaces de simultanéité, on devrait obtenir $\partial_i\epsilon^0 = 0$. On voit que ce n'est pas le cas. Toutes les transformations du type $\epsilon^0 = \frac{1}{a}f(x, y, z)$ (avec $\beta = \int_\eta(\epsilon^0 + g(\eta))$) sont autorisées. On a par exemple la liberté de redéfinir la densité par $\delta\rho \rightarrow \delta\rho - \frac{1}{a}f(x, y, z)\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\eta}$. La jauge n'est donc en réalité pas fixée complètement, et une résolution des équations différentielles ferait apparaître des solutions non physiques. Ceci a soulevé des problèmes d'interprétation avant Bardeen. Depuis, on a toujours la possibilité d'utiliser cette jauge à condition de rechercher et

d'éliminer ces modes (concrètement, ceci revient à restreindre les conditions initiales). Ce n'est donc pas en général l'approche la plus simple.

Les variables de Bardeen, exprimées dans cette jauge, valent:

$$\Phi_A = -\ddot{\mu} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (44)$$

$$\Phi_H = \frac{h}{6} - \frac{1}{3}\nabla^2\mu - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (45)$$

4.4 Jauge longitudinale (ou newtonienne ou conforme)

Elle découle de la prescription:

$$ds^2 = a^2(\eta) \{ (1 + 2\phi)d\eta^2 - (1 - 2\psi)d\vec{x}^2 \} \quad (46)$$

Cette forme n'est appropriée qu'à la description des scalaires (2 deg. lib.), mais on peut la généraliser aux vecteurs si besoin est. Pour les tenseurs, on sait qu'il n'y a pas de problème: il suffit d'ajouter H_{ij}^T .

Cette prescription, contrairement à la précédente, fixe complètement les hypersurfaces de simultanéité: c'est un vrai choix de jauge! En effet, les seules transformations autorisées sont celles qui maintiennent, pour le secteur scalaire, B_i^{\parallel} et H_{ij}^{\parallel} nuls:

$$\partial_i\epsilon^0 - \partial_i\beta = 0 \quad (47)$$

$$\left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) \beta = 0 \quad (48)$$

Cette fois ci, on peut intégrer entièrement les équations par rapport aux variables d'espace. On trouve que β est soit constant dans l'espace, soit un polynôme séparable d'ordre deux en x_1, x_2, x_3 . La seule solution bornée spatialement (ce qui est une condition nécessaire évidente pour une transformation de jauge) est donc $\beta = f(t)$, d'où $\partial_i\epsilon^0 = 0$. Ceci signifie précisément que l'ensemble des hypersurfaces de simultanéité est complètement fixé en jauge longitudinale.

Cette jauge comporte d'autres avantages. Premièrement, dans la limite newtonienne, atteinte par les modes de longueur d'onde nettement inférieure au rayon de Hubble ($k \gg aH = \dot{a}/a$), ϕ coïncide avec le potentiel gravitationnel (en effet, avec la métrique $ds^2 = a^2 \{ (1 + 2\phi)d\eta^2 - d\vec{x}^2 \}$ où a est constant, les équations d'Einstein se ramènent à l'équation d'Euler pour le potentiel gravitationnel ϕ). Deuxièmement, lorsque les invariants de Bardeen sont exprimés en jauge longitudinale, on trouve $\Phi_A = \phi$ et $\Phi_H = -\psi$. Donc, dans la jauge longitudinale, ϕ et ψ coïncident (à un signe près) avec les deux invariants de jauge de Bardeen.

4.5 Passage d'une jauge à l'autre

On écrit la transformation de coordonnées qui permet de passer de la jauge synchrone à la jauge newtonienne:

$$\phi = -\dot{\epsilon}_0 - \frac{\dot{a}}{a}\epsilon_0 \quad (49)$$

$$\psi = -\frac{h}{6} + \frac{1}{3}\nabla^2\beta + \frac{\dot{a}}{a}\epsilon_0 \quad (50)$$

$$0 = \epsilon_0 - \dot{\beta} \quad (51)$$

$$0 = \mu - \beta \quad (52)$$

(détail: l'équation (51) provient de l'équation (27) intégrée sur l'espace. On a donc rigoureusement $\epsilon_0(t, \vec{x}) = \dot{\beta}(t, \vec{x}) + f(t)$ où f est une fonction arbitraire, correspondant à une redéfinition du temps. On a déjà vu apparaître ce degré de liberté sans signification physique; on l'élimine simplement en fixant $f = 0$). On en déduit immédiatement:

$$\phi = -\ddot{\mu} - \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (53)$$

$$\psi = -\frac{h}{6} + \frac{1}{3}\nabla^2\mu + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\mu} \quad (54)$$

On a donc dans l'espace de Fourier:

$$\phi = \frac{1}{2k^2} \left[(6\ddot{\eta} + \ddot{h}) + \frac{\dot{a}}{a}(6\dot{\eta} + \dot{h}) \right] \quad (55)$$

$$\psi = \eta - \frac{1}{2k^2} \frac{\dot{a}}{a} (6\dot{\eta} + \dot{h}) \quad (56)$$

Cette démonstration a été donné dans un but pédagogique, mais les relations ci-dessus se déduisent plus rapidement de la comparaison des invariants de jauge de Bardeen dans les deux jauges.

5 Equations d'Einstein et de conservation

5.1 Tenseur énergie-impulsion

Pour un fluide parfait d'énergie ρ et de densité p , le tenseur énergie-impulsion est:

$$T_\nu^\mu = -p g_\nu^\mu + (\rho + p)U^\mu U_\nu \quad (57)$$

où U^μ est la quadrivitesse : $U^\mu = dx^\mu / \sqrt{ds^2}$. Si le fluide est au repos par rapport au référentiel comobile, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ et $T_\nu^\mu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. Si on introduit des petites vitesses v_i , qui seront considérées comme des perturbations d'ordre un, $U^\mu = (1, v^i, v^i, v^i)$. Donc le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait perturbé s'écrit au premier ordre :

$$T_0^0 = \rho = (\bar{\rho} + \delta\rho) \quad (58)$$

$$T_i^0 = (\rho + p)v_i = (\bar{\rho} + \bar{p})v_i \quad (59)$$

$$T_j^i = -p \delta_j^i = -(\bar{p} + \delta p)\delta_j^i \quad (60)$$

On remarque que v_i couplera dans les équations d'Einstein à la fois avec les perturbations scalaires et vectorielles. La composante responsable des perturbations scalaires est la partie longitudinale de v_i : $v_i^{\parallel} = \partial_i \tilde{v}$. Cependant, il est d'usage de prendre comme degré de liberté scalaire la divergence θ :

$$\theta = \partial^i v_i \quad (= \nabla^2 \tilde{v}) \quad (61)$$

Les perturbations ci-dessus seraient complètement générales si l'on rajoutait un tenseur de trace nulle Σ_j^i à T_j^i , pour obtenir les 10 degrés de liberté de δT_j^i . Or, la composante $\Sigma_j^{\parallel i}$ couple avec les perturbations scalaires. Nous verrons que cette composante est importante, notamment pour les neutrinos. Comme avec la vitesse, au lieu d'introduire un potentiel $\Sigma_j^{\parallel i} = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}) \tilde{\sigma}$, on définit le degré de liberté scalaire σ (appelé cisaillement ou impulsion anisotrope) par :

$$(\bar{\rho} + \bar{p}) \nabla^2 \sigma = -(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}) \Sigma_j^i \quad (= -\frac{2}{3} \nabla^4 \tilde{\sigma}) \quad (62)$$

On a donc l'ensemble des degrés de liberté scalaires du tenseur énergie-impulsion (avec $\delta \equiv \delta\rho/\bar{\rho}$):

$$T_0^0 = \bar{\rho} (1 + \delta) \quad (63)$$

$$\partial^i T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})\theta \quad (64)$$

$$T_i^i = -3(\bar{p} + \delta p) \quad (65)$$

$$-(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}) T_j^i = (\bar{\rho} + \bar{p}) \nabla^2 \sigma \quad (66)$$

Nous n'avons pas encore donné la dérivée de Lie pour un vecteur 1-covariant 1-contravariant. De la même façon que l'on a obtenu l'eq.(14), on calcule aisément:

$$\delta T_\nu^{\prime\mu} = \delta T_\nu^\mu + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\sigma} T_\nu^\sigma - \frac{\partial \epsilon^\tau}{\partial x^\nu} T_\tau^\mu - \epsilon^\gamma \frac{\partial T_\nu^\mu}{\partial x^\gamma} \quad (67)$$

On en déduit:

$$\delta T_0^{\prime 0} - \delta T_0^0 = -\epsilon_0 \frac{\partial T_0^0}{\partial x^0} = -\epsilon_0 \dot{\rho} \quad (68)$$

$$\delta T_i^{\prime 0} - \delta T_i^0 = \frac{\partial \epsilon^0}{\partial x^i} (T_i^i - T_0^0) = -\partial_i \epsilon_0 (\bar{\rho} + \bar{p}) \quad (69)$$

$$\delta T_j^{\prime i} - \delta T_j^i = -\epsilon_0 \frac{\partial T_i^i}{\partial x^0} \delta_j^i = -\epsilon_0 \dot{\bar{p}} \delta_j^i \quad (70)$$

Ceci implique une transformation des degrés de liberté scalaires (en espace de Fourier):

$$\delta' - \delta = -\epsilon_0 \frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad (71)$$

$$\theta' - \theta = k^2 \epsilon_0 \quad (72)$$

$$\delta p' - \delta p = -\epsilon_0 \dot{\bar{p}} \quad (73)$$

En revanche, σ ne change pas. Pour les degrés de liberté ci-dessus, on peut définir des invariants de jauge, en combinant densité, pression et vitesse soit entre elles (par exemple $\delta + \frac{\dot{\rho}}{\rho} k^{-2} \theta$ et $\delta p - \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{p}} \rho \delta$), soit avec des perturbations de la

métrique. En nous inspirant de la méthode utilisée pour construire Φ_A et Φ_H , on remarque que $\Delta(b + \dot{\mu}) = -\epsilon_0$, et on trouve immédiatement les invariants de jauge:

$$\delta^{g^i} = \delta - \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} (b + \dot{\mu}) \quad (74)$$

$$\theta^{g^i} = \theta + k^2 (b + \dot{\mu}) \quad (75)$$

$$\delta p^{g^i} = \delta p - \dot{\bar{p}} (b + \dot{\mu}) \quad (76)$$

En jauge longitudinale, on a $b = \mu = 0$, et les perturbations du tenseur énergie-impulsion coïncident avec des invariants de jauge, comme ϕ et ψ . Par conséquent, résoudre les équations d'Einstein et les équations de conservation dans la jauge longitudinale revient à résoudre des équations invariantes de jauge.

Les relations précédentes nous donnent aussi immédiatement le lien entre les perturbations en jauge longitudinale et en jauge synchrone; il suffit de prendre $b = 0$ et $\mu = -\frac{1}{2k^2}(6\eta + h)$:

$$\delta(lon) - \delta(syn) = \frac{1}{2k^2}(6\dot{\eta} + \dot{h}) \frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} \quad (77)$$

$$\theta(lon) - \theta(syn) = -\frac{1}{2}(6\dot{\eta} + \dot{h}) \quad (78)$$

$$\delta p(lon) - \delta p(syn) = \frac{1}{2k^2}(6\dot{\eta} + \dot{h}) \dot{\bar{p}} \quad (79)$$

5.2 Equations d'Einstein en jauge longitudinale

Après calcul des symboles de Christoffel et du tenseur de Ricci, on trouve, à l'ordre zéro:

$$G_0^0 = 3 a^{-2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = 3 \left(\frac{\partial a}{a \partial t}\right)^2 = 8\pi\mathcal{G} \bar{\rho}, \quad (80)$$

$$G_i^i = a^{-2} \left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) = 2\frac{\partial^2 a}{a \partial t^2} + \left(\frac{\partial a}{a \partial t}\right)^2 = -8\pi\mathcal{G} \bar{p}, \quad (81)$$

et à l'ordre un:

$$\delta G_0^0(lon) = 2a^{-2} \left\{ -3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} + \nabla^2 \psi \right\} = 8\pi\mathcal{G} \bar{\rho} \delta(lon) \quad (82)$$

$$\delta G_i^0(lon) = 2a^{-2} \partial_i \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \phi + \dot{\psi} \right\} = 8\pi\mathcal{G} (\bar{\rho} + \bar{p}) v_i(lon) \quad (83)$$

$$\delta G_j^i(lon) = -2a^{-2} \left\{ \left[\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) \phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\phi} + 2\dot{\psi}) + \ddot{\psi} + \frac{1}{3}\nabla^2(\phi - \psi) \right] \delta_j^i - \frac{1}{2}(\partial^i \partial_j - \frac{1}{3}\nabla^2 \delta_j^i)(\phi - \psi) \right\} \quad (84)$$

$$= 8\pi\mathcal{G} (-\delta p(lon) \delta_j^i + \Sigma_j^i) \quad (85)$$

On en déduit, pour les quatre degrés de liberté scalaire et dans l'espace de Fourier:

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \phi - 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\psi} - k^2 \psi = 4\pi\mathcal{G} a^2 \bar{\rho} \delta(lon) \quad (86)$$

$$-k^2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \phi + \dot{\psi}\right) = 4\pi\mathcal{G} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \theta(lon) \quad (87)$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right) \phi + \frac{\dot{a}}{a}(\dot{\phi} + 2\dot{\psi}) + \ddot{\psi} - \frac{1}{3}k^2(\phi - \psi) = 4\pi\mathcal{G} a^2 \delta p \quad (88)$$

$$k^2(\phi - \psi) = 12\pi\mathcal{G} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \sigma \quad (89)$$

On peut remarquer que dans la limite newtonienne ($k \rightarrow \infty$ and $a = 1$), la solution est donnée par:

$$\phi = \psi \quad (90)$$

$$-k^2 \phi = 4\pi\mathcal{G} a^2 \bar{\rho} \delta(lon) \quad (91)$$

On retrouve bien l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationel ϕ :

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\mathcal{G} \delta\rho \quad (92)$$

5.3 Equations d'Einstein en jauge synchrone

En jauge synchrone et à l'ordre un, on trouve :

$$\delta G_0^0(syn) = 2a^{-2} \left\{ \nabla^2 \eta + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} \right\} = 8\pi \mathcal{G} \bar{\rho} \delta(syn) \quad (93)$$

$$\delta G_i^0(syn) = 2a^{-2} \partial_i \dot{\eta} = 8\pi \mathcal{G} (\bar{\rho} + \bar{p}) v_i(syn) \quad (94)$$

$$\delta G_j^i(syn) = -2a^{-2} \left\{ -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \ddot{h} + \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} + \nabla^2 \eta \right] \delta_j^i + \frac{1}{2} (\partial^i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_j^i) (\eta + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\mu} + \ddot{\mu}) \right\} \quad (95)$$

$$= 8\pi \mathcal{G} (-\delta p(syn) \delta_j^i + \Sigma_j^i) \quad (96)$$

On en déduit, pour les quatre degrés de liberté scalaire et dans l'espace de Fourier:

$$-k^2 \eta + \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} = 4\pi \mathcal{G} a^2 \bar{\rho} \delta(syn) \quad (97)$$

$$-k^2 \dot{\eta} = 4\pi \mathcal{G} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \theta(syn) \quad (98)$$

$$-\frac{1}{2} \ddot{h} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} + k^2 \eta = 12\pi \mathcal{G} a^2 \delta p(syn) \quad (99)$$

$$\frac{1}{2} (6\ddot{\eta} + \ddot{h}) + \frac{\dot{a}}{a} (6\dot{\eta} + \dot{h}) - k^2 \eta = 12\pi \mathcal{G} a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) \sigma(syn) \quad (100)$$

5.4 Equations de conservation

Pour les fluides sans interactions, l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion s'écrit:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^{\nu\beta} = 0 \quad (101)$$

Nous effectuerons ce calcul uniquement dans la jauge longitudinale, en omettant de préciser (*lon*) après δ , θ et δp . Les symboles de Christoffel non nuls sont:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{\dot{a}}{a} + \dot{\phi} \\ \text{Pour } i \text{ fixé : } \Gamma_{ii}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i} = -\partial_i \psi \\ \Gamma_{ii}^0 &= -\frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^0} = \frac{\dot{a}}{a} (1 - 2\phi - 2\psi) - \dot{\psi} \\ \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \partial_i \phi \\ \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = \partial_i \phi \\ \Gamma_{i0}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^0} = \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\psi} \\ \text{Pour } i \neq j \text{ fixés : } \Gamma_{jj}^i &= -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i} = \partial_i \psi \\ \Gamma_{ij}^i &= \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j} = -\partial_j \psi \end{aligned} \quad (102)$$

D'autre part, en posant $\bar{p} = w \bar{\rho}$, on a $\bar{p} + \delta p = w \bar{\rho} + \frac{\delta p}{\delta \rho} \bar{\rho} \delta$, et $T^{\mu\nu}$ s'écrit au premier ordre:

$$T^{00} = a^{-2} (1 - 2\phi) T_{00} = a^{-2} \bar{\rho} (1 + \delta - 2\phi) \quad (103)$$

$$\partial_i T^{0i} = -a^{-2} \partial_i T_i^0 = -a^{-2} \bar{\rho} (1 + w) \theta \quad (104)$$

$$T^{ij} = -a^{-2} (1 + 2\psi) T_j^i = a^{-2} \bar{\rho} (w + \frac{\delta p}{\delta \rho} \delta + 2w \psi) \delta^{ij} + \Sigma^{ij} \quad (105)$$

$$(\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}) T^{ij} = -a^{-2} (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \nabla^2 \delta_{ij}) \Sigma_j^i = a^{-2} \bar{\rho} (1 + w) \nabla^2 \sigma \quad (106)$$

On écrit d'abord l'équation de conservation de l'énergie, en ne gardant que les termes d'ordre inférieur ou égal à un:

$$T^{\mu 0}{}_{;\mu} = \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{0i} + 2\Gamma_{00}^0 T^{00} + \Gamma_{ii}^0 T^{ii} + \Gamma_{i0}^i T^{00} = 0 \quad (107)$$

D'où:

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w) + \frac{\dot{\bar{p}}}{\bar{p}}(\delta - 2\phi) + \dot{\delta} - (1+w)(\theta + 3\dot{\psi}) - 6\frac{\dot{a}}{a}(1+w)\phi + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\delta p}{\delta \rho} + 1 \right) \delta = 0 \quad (108)$$

A l'ordre zéro, on retrouve la loi de conservation de l'énergie pour le fond:

$$\frac{\dot{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+w) = 0 \quad (109)$$

Au premier ordre, en utilisant (109), on trouve l'équation de continuité:

$$\dot{\delta} = (1+w)(\theta + 3\dot{\psi}) + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(w - \frac{\delta p}{\delta\rho}\right)\delta \quad (110)$$

En général:

$$\frac{\delta p}{\delta\rho}(\vec{x}, t) \neq \frac{\bar{p}(t)}{\bar{\rho}(t)} = w(t) \quad (111)$$

Nous reviendrons ultérieurement sur ce point (lié à la définition des perturbations adiabatiques dans un fluide à plusieurs composantes).

On écrit maintenant la conservation de l'impulsion à l'ordre un :

$$\forall i, \quad T^{\mu i}{}_{;\mu} = \partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ij} + \Gamma_{00}^0 T^{00} + (2\Gamma_{i0}^i + \Gamma_{j0}^j + \Gamma_{00}^0)T^{i0} + (\Gamma_{0i}^0 + \Gamma_{ji}^j)T^{ii} + \Gamma_{jj}^i T^{jj} \quad (112)$$

$$= (\partial_0 + 6\frac{\dot{a}}{a})T^{0i} + \partial_j T^{ij} + (\partial_i\phi)T^{00} + (\partial_i\phi - 2\partial_i\psi)T^{ii} \quad (113)$$

$$= 0 \quad (114)$$

En prenant la divergence de cette relation, on trouve:

$$(\partial_0 + 6\frac{\dot{a}}{a})\{\partial_i T^{0i}\} + (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\nabla^2\delta_{ij})T^{ij} + \frac{1}{3}\nabla^2\delta_{ij}T^{ij} + (\nabla^2\phi)T^{00} + (\nabla^2\phi - 2\nabla^2\psi)T^{ii} \quad (115)$$

$$= -(\partial_0 + 6\frac{\dot{a}}{a})\{a^{-2}\bar{\rho}(1+w)\theta\} + a^{-2}\bar{\rho}(\nabla^2\phi) + a^{-2}\bar{\rho}(1+w)(\nabla^2\sigma) + a^{-2}(\nabla^2\delta p) + a^{-2}\bar{\rho}w(\nabla^2\phi) = 0 \quad (116)$$

En divisant par $a^{-2}\bar{\rho}$, et en utilisant l'eq.(109), on arrive à:

$$\frac{\dot{a}}{a}(1+w)(3w-1)\theta - \dot{w}\theta - (1+w)\dot{\theta} + (1+w)(\nabla^2\phi) + (1+w)(\nabla^2\sigma) + (\nabla^2\delta p)/\bar{\rho} = 0 \quad (117)$$

Finalement, en espace de Fourier, et après division par $(1+w)$, on obtient l'équation d'Euler:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{a}}{a}(3w-1)\theta - \frac{\dot{w}}{1+w}\theta - k^2\phi - k^2\sigma - \frac{1}{1+w}k^2\left(\frac{\delta p}{\delta\rho}\right)\delta \quad (118)$$

6 Solutions analytiques pour des modèles simplifiés de l'Univers

6.1 Univers contenant un seul fluide parfait

Supposons que l'Univers contienne un seul fluide parfait, avec un équation d'état $p = w\rho$, où w est une constante. On a alors $w = \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)} = \frac{\bar{p}(t)}{\bar{\rho}(t)} = \frac{\delta p(\vec{x}, t)}{\delta\rho(\vec{x}, t)} = c_s^2$. De plus, comme pour un fluide parfait $\sigma = 0$, on a immédiatement $\phi = \psi$ d'après (89).

L'évolution du fond est gouvernée par les 3 équations eq.(80,81,109), dont 2 seulement sont indépendantes, et qui donnent a et $\bar{\rho}$ en fonction de η . L'évolution des perturbations est donnée par 5 équations (86, 87, 88, 110, 118) dont 3 seulement sont indépendantes, et qui donnent les solutions pour ϕ , δ et θ . Par exemple, on peut combiner les équations d'Einstein en une équation du deuxième ordre pour ϕ :

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+c_s^2)\dot{\phi} + \left(2\frac{\ddot{a}}{a} + (3c_s^2-1)\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + c_s^2k^2\right)\phi = 0 \quad (119)$$

qui se simplifie en utilisant les équations de Friedmann (80,81):

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1+c_s^2)\dot{\phi} + c_s^2k^2\phi = 0 \quad (120)$$

En intégrant cette équation, on trouvera $\phi(\vec{k})$ en fonction de deux constantes d'intégration. Ensuite, δ et θ se déduisent immédiatement de (86, 87).

6.1.1 Univers avec de la radiation

Avec $w = 1/3$, les équations (80, 81) donnent $a = \eta$ (à un facteur près) et $\rho = \frac{3}{8\pi G}\eta^{-4} \propto a^{-4}$ (remarque: on a alors $t \propto \eta^2$ et $a \propto t^{1/2}$). L'équation d'évolution pour ϕ , eq. (120), devient:

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{\eta}\dot{\phi} + \frac{k^2}{3}\phi = 0 \quad (121)$$

Pour éliminer le terme de friction, on effectue le changement de variable $\phi = \eta^{-2}u$:

$$\ddot{u} + \left(\frac{k^2}{3} - 2\eta^{-2}\right)u = 0 \quad (122)$$

Les solutions exactes sont des fonctions de Bessel. Nous pouvons facilement donner les limites à grande et petite longueur d'onde. La longueur d'onde critique qui délimite ces deux régimes est donnée par le rayon de Hubble:

$$\lambda = R_H \Rightarrow 2\pi a/k = 1/H \Rightarrow k = 2\pi \frac{\dot{a}}{a} = 2\pi/\eta \Rightarrow k\eta = 2\pi \quad (123)$$

Donc, en dehors du rayon de Hubble, $k\eta \ll 2\pi$. Alternativement, on peut définir les grandes et petites longueurs d'onde par rapport à la longueur de Jeans $R_J = c_s R_H$:

$$\lambda = R_J \Rightarrow c_s k\eta = 4\pi \quad (124)$$

Les deux définitions ne diffèrent que par un facteur c_s d'ordre un.

Pour les grandes longueurs d'onde, les solutions sont $u \propto \eta^2$ et $u \propto \eta^{-1}$, et:

$$\phi = C_1(\vec{k}) + C_2(\vec{k})\eta^{-3} \quad (125)$$

Le mode constant de coefficient C_1 est appelé quasi-isotrope, tandis que le mode C_2 est appelé décroissant. En effet, lorsque l'on remonte le temps, la fonction η^{-3} augmente, et diverge au voisinage de la singularité initiale ($a \rightarrow 0$ implique $\eta \rightarrow 0$). Donc, ce mode aboutit à une violation de l'homogénéité et de l'isotropie dans l'Univers primordial, tandis que le terme constant maintient l'Univers à un degré d'inhomogénéité et d'anisotropie constant, d'où son nom de mode quasi-isotrope.

En pratique, on peut placer une limite sur l'amplitude relative des C_1 et des C_2 à partir de considérations sur l'homogénéité de l'Univers dans le passé, par exemple au moment de la nucléosynthèse. De plus, les modèles d'inflation standard indiquent que le mode décroissant était déjà négligeable au début de la domination de la radiation.

Toujours en-dehors du rayon de Hubble, les perturbations de densité et de vitesse sont données par:

$$\delta = -2 \left(C_1(\vec{k}) - 2C_2(\vec{k})\eta^{-3} \right) \quad (126)$$

$$\theta = -\frac{k^2\eta^2}{2} \left(\frac{1}{\eta}C_1(\vec{k}) - \frac{2}{\eta^4}C_2(\vec{k}) \right) \quad (127)$$

En négligeant complètement le mode décroissant, on voit que les perturbations de densité sont constantes pour $k^2\eta^2 \ll 1$.

Dans la limite inverse, $k\eta \gg 1$, on trouve:

$$\phi = \eta^{-2} \left(B_1(\vec{k}) \cos kc_s\eta + B_2(\vec{k}) \sin kc_s\eta \right) \quad (128)$$

$$\delta = -\frac{2}{3}k^2 \left(B_1(\vec{k}) \cos kc_s\eta + B_2(\vec{k}) \sin kc_s\eta \right) \quad (129)$$

$$\theta = -\frac{1}{2\sqrt{3}}k^3 \left(-B_1(\vec{k}) \sin kc_s\eta + B_2(\vec{k}) \cos kc_s\eta \right) \quad (130)$$

A l'intérieur du rayon de Hubble, dans un Univers dominé par la radiation, les perturbations oscillent et ne croissent pas.

La fonction de Bessel qui donne de façon exacte la transition entre les deux régimes est en fait relativement simple (car d'ordre 3/2):

$$\phi = \eta^{-3} \{ 9\sqrt{3}k^{-3} [\sin(kc_s\eta) - kc_s\eta \cos(kc_s\eta)] C_1(\vec{k}) + [\cos(kc_s\eta) + kc_s\eta \sin(kc_s\eta)] C_2(\vec{k}) \} \quad (131)$$

6.1.2 Univers avec de la matière froide

Avec $w = 0$, l'équation (81) donne $a = \eta^2$ (à un facteur près), et (80) donne $\rho = \frac{12}{8\pi\mathcal{G}}\eta^{-6} \propto a^{-3}$ (remarque: on a alors $t \propto \eta^3$ et $a \propto t^{2/3}$). L'équation d'évolution pour ϕ devient:

$$\ddot{\phi} + \frac{6}{\eta}\dot{\phi} = 0 \quad (132)$$

Les solutions sont indépendantes de la longueur d'onde:

$$\phi = C_1(\vec{k}) + C_2(\vec{k})\eta^{-5} \quad (133)$$

Les perturbations de densité et de vitesse sont données par:

$$\delta = -\left(2 + \frac{k^2\eta^2}{6}\right)C_1(\vec{k}) + \left(3 - \frac{k^2\eta^2}{6}\right)C_2(\vec{k})\eta^{-5} \quad (134)$$

$$\theta = -\frac{k^2\eta^2}{6}\left(\frac{2}{\eta}C_1(\vec{k}) - \frac{3}{\eta^6}C_2(\vec{k})\right) \quad (135)$$

En négligeant complètement le mode décroissant, qui diverge au voisinage de la singularité, on voit que les perturbations de la métrique et de la densité sont constantes en-dehors du rayon de Hubble, avec $|\delta| = 2|\Phi|$, comme dans le modèle avec de la radiation. Par contre, lorsque les perturbations de la matière entrent dans le rayon de Hubble, $k\eta \geq 1$, elles croissent en $\eta^2 \propto t^{2/3}$, pour aboutir au régime non-linéaire et à la formation des structures.

6.2 Spectre primordial

Calculons le spectre de puissance actuel de la matière (but de cet exposé) au temps présent, pour l'univers simplifié de la section précédente, qui ne contient que de la matière froide.

La relation actuelle entre ϕ et δ , pour les modes observables (donc à l'intérieur du rayon de Hubble), est donnée par l'équation d'Einstein (86):

$$-k^2\phi = 4\pi\mathcal{G}a_0^2\bar{\rho}_0\delta \quad (136)$$

(c'est simplement l'équation de Poisson newtonienne). La valeur actuelle de la densité est mesurable en fonction du paramètre de Hubble $H = d\ln a/dt = \dot{a}/a$, d'après l'équation de Friedmann (80):

$$\bar{\rho}_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi\mathcal{G}} \quad (137)$$

C'est par définition la densité critique au temps présent η_0 . Donc le spectre de densité de matière vaut:

$$P(k) \equiv \langle |\delta(\vec{k}, \eta_0)|^2 \rangle = \left(\frac{2k^2}{3H_0^2 a_0^2}\right)^2 \langle |\phi(\vec{k}, \eta_0)|^2 \rangle \quad (138)$$

et dans notre exemple:

$$P(k) \equiv \langle |\delta(\vec{k}, \eta_0)|^2 \rangle = \left(\frac{2k^2}{3H_0^2 a_0^2}\right)^2 \langle |C_1(\vec{k})|^2 \rangle \quad (139)$$

La moyenne ci-dessus peut être prise dans deux sens. Si le $P(k)$ est déduit d'une observation, et donc d'une véritable distribution de matière $\delta(\vec{x}, \eta_0)$, la moyenne est prise sur tous les modes de Fourier \vec{k} de même nombre d'onde $k = |\vec{k}|$. En effet, s'il est avéré que l'univers est isotrope, il n'est pas pertinent de distinguer entre plusieurs directions pour une perturbation de longueur d'onde donnée.

Si le $P(k)$ est déduit théoriquement, alors toutes les perturbations ($\delta(\vec{k}, \eta_0)$, $\phi(\vec{k}, \eta_0)$, ...) et toutes les constantes d'intégration ($C_1(\vec{k})$, $C_2(\vec{k})$, ...) sont considérées comme des variables aléatoires, dont la distribution statistique ne dépend que de la longueur d'onde, c'est-à-dire de $|\vec{k}|$. La théorie des perturbations montre comment la distribution se transporte d'un temps à un autre. Comme il s'agit d'une théorie des perturbations *linéaires*, la forme de la distribution est conservée par l'évolution, mais les moments sont multipliés en général par une fonction de k et η . Par conséquent, l'information sur une perturbation de longueur d'onde donnée peut être décomposée en deux parties; premièrement, la distribution statistique à un instant initial, qui doit être soit prise comme une hypothèse, soit calculée pour un modèle donné de génération des fluctuations (inflation, défauts topologiques); deuxièmement, la variance actuelle de la distribution en fonction de la variance à l'instant initial.

La véritable utilité de la théorie linéaire des perturbations est de montrer comment une spectre de fluctuations, $\langle |\delta|^2 \rangle$ ou $\langle |\phi|^2 \rangle$, se déforme au cours du temps. Dans l'exemple simpliste de cette section, le spectre $\langle |\phi|^2 \rangle$ ne se déforme pas du tout, puisqu'il reste égal à tout instant à $\langle |C_1(\vec{k})|^2 \rangle$. En revanche, le spectre $\langle |\delta|^2 \rangle$ reste constant dans l'Univers primordial (et égal à $4 \langle |C_1(\vec{k})|^2 \rangle$), mais ensuite il croît à l'intérieur du rayon de Hubble, et actuellement il est multiplié par $(k^2/3H_0^2 a_0^2)^2$.

Les modèles d'inflation les plus simple prédisent que dans l'univers primordial, les $\phi(\vec{k})$ sont des variables indépendantes et gaussiennes, et dont la variance (ou spectre de puissance) est en loi de puissance avec un exposant n (appelé le "tilt") proche de un:

$$\langle \phi(\vec{k})\phi(\vec{k}')^* \rangle = \langle C_1(\vec{k})C_1(\vec{k}')^* \rangle = Ak^{n-4}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \simeq Ak^{-3}\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{k}') \quad (140)$$

(on a introduit une constante de normalisation A). Lorsque $n = 1$ le spectre est dit "invariant d'échelle" ou de Harrison-Zel'dovich. En effet, la variance de ϕ dans l'espace réel est une intégrale en dk/k :

$$\langle \phi(x)^2 \rangle = \int d^3k e^{-i\vec{k}\vec{x}} \int d^3k' e^{i\vec{k}'\vec{x}} \langle \phi(\vec{k})\phi(\vec{k}')^* \rangle = A \int \frac{dk}{k} \quad (141)$$

On a finalement dans notre exemple (irréaliste) d'Univers purement CDM:

$$P(k) = \left(\frac{2k^2}{3H_0^2} \right)^2 Ak^{n-4} \propto k^n \simeq k \quad (142)$$

Dans cet Univers, avec des conditions initiales exactement invariantes d'échelle ($n = 1$), le spectre de puissance est une fonction linéaire de k .

6.3 Univers contenant plusieurs fluides parfait

Si l'Univers contient plusieurs fluides, les tenseurs énergie-impulsion s'ajoutent: $T_\mu^\nu = \sum_i T_\mu^{(i)\nu}$. Les $T_\mu^{(i)\nu}$ sont conservés individuellement pour des fluides non couplés. Les équations d'Einstein gardent la même forme si l'on définit

$$\bar{\rho} \delta \equiv \sum_i \bar{\rho}^{(i)} \delta^{(i)} \quad (143)$$

$$(\bar{\rho} + \bar{p}) \theta \equiv \sum_i (\bar{\rho}^{(i)} + \bar{p}^{(i)}) \theta^{(i)} \quad (144)$$

$$\delta p \equiv \sum_i \delta p^{(i)} \quad (145)$$

$$(\bar{\rho} + \bar{p}) \sigma \equiv \sum_i (\bar{\rho}^{(i)} + \bar{p}^{(i)}) \sigma^{(i)} \quad (146)$$

$$(147)$$

Dans cette section, on suppose que l'univers contient N fluides parfaits, vérifiant chacun $w_i = \frac{\bar{p}^{(i)}}{\bar{\rho}^{(i)}} = \frac{\delta p^{(i)}}{\delta \rho^{(i)}}$ et $\sigma^{(i)} = 0$.

Les $N + 1$ variables de fond ($a, \bar{\rho}^{(i)}$) se déduisent d'un système composé, par exemple, des N équations de conservation et d'une équation de Friedmann.

Les $2N + 1$ variables des perturbations ($\phi, \delta\rho^{(i)}, \delta\theta^{(i)}$) se déduisent d'un système composé, par exemple, des $2N$ équations de continuité et d'Euler, et d'une équation d'Einstein. On peut montrer que les solutions s'expriment en fonction de $2N$ constantes d'intégration (nous le verrons plus loin sur un exemple). Avant de passer à des modèles concrets, nous allons classer ces solutions en fonction de leurs propriétés physiques.

Perturbations adiabatiques et isocourbes

On a vu que $\delta p = \sum_i w_i \delta \rho^{(i)}$, ce qui revient à considérer p comme une fonction de N variables $\rho^{(i)}$ avec $w_i = \partial p / \partial \rho^{(i)}|_{\rho^{(j \neq i)}}$. Nous allons réexprimer δp en fonction d'un autre jeu de N variables, de manière à introduire la vitesse du son.

Pour ce faire, nous allons privilégier arbitrairement un fluide, par exemple $i = N$, et définir $S_i \equiv n_i/n_N$, où n_i représente le nombre de particules de l'espèce i par unité de volume. En thermodynamique, S_i est l'entropie de i par rapport à N . En considérant p comme une fonction de $(\rho, S_1, \dots, S_{N-1})$, et en écrivant sa différentielle, on définit la vitesse de son:

$$\delta p = (\partial p / \partial \rho)|_{S_i} \delta \rho + \sum_i^{N-1} (\partial p / \partial S_i)|_{S_{j \neq i}, \rho} \delta S_i \equiv c_s^2 \delta \rho + \sum_i^{N-1} \tau_i \delta S_i \quad (148)$$

(à l'ordre un, on peut utiliser les quantités homogènes dans les dérivées partielles). Les perturbations telles que $\delta S_i = 0$ pour tout i vérifient $\delta p = c_s^2 \delta \rho$, et sont dites "isentropiques" ou "adiabatiques". Les perturbations telles que $\delta \rho = 0$ sont dites perturbations d'entropies ou perturbations "isodensité"; on les appelle aussi "isocourbes" car $\delta \rho = 0$ implique soit $\phi = 0$ (pas de perturbations de la courbure), soit $\phi \propto \exp\{-\int (\frac{\dot{a}}{a} + \frac{k^2 a}{3\dot{a}}) d\eta\} \rightarrow 0$ (par exemple, si $a \propto \eta^\alpha$, la solution précédente devient $\phi \propto a^{-1} \exp\{-\frac{k^2 \eta^2}{6\alpha}\} \rightarrow 0$: c'est une solution toujours décroissante pour ϕ).

On voit qu'avec un seul fluide, les perturbations sont automatiquement de nature adiabatique, dans le sens où $\delta p = c_s^2 \delta \rho$.

Prenons l'exemple d'un Univers contenant deux fluides: une composante de matière (particules de masse m) et une de radiation. On a $\rho_m = m n_m$ et $\rho_r \propto n_r^{4/3}$ (en effet, pour la radiation, $n_r \propto T^3$ et $\rho \propto T^4$). Si l'entropie est définie par rapport à la matière, on aura:

$$\delta S/S = \frac{\delta n_r}{n_r} - \frac{\delta n_m}{n_m} = \frac{3}{4} \delta \rho_r / \bar{\rho}_r - \delta \rho_m / \bar{\rho}_m \quad (149)$$

Or $\delta p = \frac{1}{3} \delta \rho_r$. Donc, en remplaçant $\delta \rho_m$ par $\delta \rho - \delta \rho_r$ dans l'expressions de $\delta S/S$, on trouve:

$$\delta p = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3\bar{\rho}_m}{4\bar{\rho}_r} \right)^{-1} \left[\delta \rho + \frac{\bar{\rho}_m}{S} \delta S \right] \quad (150)$$

On en déduit immédiatement:

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3\rho_m}{4\rho_r} \right)^{-1}. \quad (151)$$

En choisissant alternativement de définir les perturbations d'entropie par rapport à la radiation, on aboutirait au même résultat avec $\delta S \rightarrow -\delta S$ et à la même expression pour la vitesse du son.

Nous voyons que lorsque l'Univers est dominé soit par la matière, soit par la radiation, on a $c_s = 0$ ou $c_s = \frac{1}{3}$. Cette description généralise le chapitre précédent dans deux directions; premièrement, de nouveaux modes apparaissent, appelés modes isocourbes; deuxièmement, même en l'absence de modes isocourbes, c_s n'est plus une constante, mais une fonction des densités de fond et donc du temps, qui décrit les transitions entre les différentes équations d'états dominantes.

Dans un Univers quelconque, on appellera "condition initiale adiabatique" (resp. "condition initiale isocourbe") la prescription $\delta_m = \frac{3}{4} \delta_r$ pour chaque composante de matière et chaque composante de radiation (resp. $\delta = 0$). Il est clair, d'une part, que toute solution correspond à une superposition linéaire d'une solution adiabatique et d'une solution isocourbe. Les solutions adiabatiques indépendantes sont au nombre de 2, les solutions isocourbes indépendantes au nombre de $2N - 2$.

Une solution satisfaisant à des conditions initiales adiabatiques reste-t-elle purement adiabatique au cours de son évolution? La réponse est oui, tant que le mode est à l'extérieur du rayon de Hubble, et non ensuite. En effet, dans la limite $k \rightarrow \infty$, on remarque d'après les équations d'Einstein (87) que dans un développement en k/a , les vitesses $\theta^{(i)}$ sont d'ordre un. Par conséquent les équations de continuité (110) se simplifient en $\dot{\delta}^{(i)} = 3(1+w)\dot{\phi}$. On en déduit immédiatement pour les composantes de matière et de radiation:

$$\dot{\delta}_m^{(i)} = \frac{3}{4} \dot{\delta}_r^{(j)} = 3\dot{\phi} \quad (152)$$

(où l'indice i parcourt toutes les composantes de matière et l'indice j toutes les composantes de radiation). On voit immédiatement que des perturbations adiabatiques restent adiabatiques à l'intérieur du rayon de Hubble, et que pour des perturbations isocourbes, $\delta S/S$ est constant à l'extérieur du rayon de Hubble.

6.4 Perturbations dans un Univers photons + CDM

On suppose que l'Univers contient uniquement des photons et de la matière noire froide (CDM), sans interactions. La façon de décrire les perturbations que nous utilisons dans ce chapitre, en terme des seules fonctions δ_i , θ_i et $\delta p_i = w\bar{\rho}\delta_i$, est une approche exacte pour la matière noire froide; en revanche, c'est seulement une approximation pour les photons, valable avant leur découplage (qui a lieu normalement peu après l'égalité). La solution présentée dans ce chapitre est donc réaliste, sauf pour l'évolution de δ_r après le découplage (qui de toute façon n'a quasiment plus d'influence à ce moment-là sur l'évolution de ϕ et δ_m). C'est donc un cadre parfaitement adéquat pour calculer le $P(k)$ dans un univers photons + CDM.

6.4.1 Solution pour le fond

On sait que $\bar{\rho}_m \propto a^{-3}$ et l'on choisit le coefficient de proportionnalité de manière à simplifier au maximum les équations qui vont suivre:

$$\bar{\rho}_m = \frac{3}{8\pi G} a^{-3} \quad (153)$$

On sait de plus que $\bar{\rho}_r \propto a^{-4}$. Si au moment de l'égalité $\bar{\rho}_r = \bar{\rho}_m$, on a $a = a_{eq}$, alors:

$$\bar{\rho}_r = \frac{3}{8\pi G} a_{eq} a^{-4} \quad (154)$$

En utilisant (151), on en déduit la vitesse du son:

$$c_S^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3a}{4a_{eq}} \right)^{-1} \quad (155)$$

L'évolution de facteur d'échelle découle de l'équation de Friedmann (80):

$$\dot{a}^2 = a + a_{eq} \quad (156)$$

L'équation admet une solution unique:

$$a = \frac{\eta^2}{4} + \sqrt{a_{eq}} \eta \quad (157)$$

On en déduit que l'égalité se produit au temps conforme η_{eq} tel que:

$$\eta_{eq} = 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{a_{eq}} \quad (158)$$

6.4.2 Comptage des solutions indépendantes

Le système est gouverné par 7 équations dont 5 sont indépendantes:

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \phi - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} - k^2 \phi = 4\pi G a^2 (\rho_m \delta_m + \rho_r \delta_r) \quad (159)$$

$$-k^2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \phi + \dot{\phi} \right) = 4\pi G a^2 (\rho_m \theta_m + \frac{4}{3} \rho_r \theta_r) \quad (160)$$

$$\left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \right) \phi + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} + \ddot{\phi} = 4\pi G a^2 \frac{\rho_r}{3} \delta_r \quad (161)$$

$$\dot{\delta}_m = \theta_m + 3\dot{\phi} \quad (162)$$

$$\dot{\theta}_m = -\frac{\dot{a}}{a} \theta_m - k^2 \phi \quad (163)$$

$$\dot{\delta}_r = \frac{4}{3} \theta_r + 4\dot{\phi} \quad (164)$$

$$\dot{\theta}_r = -k^2 \phi - \frac{k^2}{4} \delta_r \quad (165)$$

On peut proposer le schéma de résolution suivant: l'équation (159) - $\frac{1}{3}$ (161) donne δ_m en fonction de ϕ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ (165bis). En dérivant et en remplaçant dans (162) on obtient θ_m en fonction de ϕ , $\dot{\phi}$, $\ddot{\phi}$, $\ddot{\phi}$ (165ter). En remplaçant finalement dans (163), on obtient une équation différentielle du 4ième ordre en ϕ , avec 4 solutions indépendantes. Les autres variables se déduisent alors immédiatement de (165ter), (165bis), (161) et (160).

En pratique, les solutions de l'équation du 4ième ordre sont difficiles à trouver. Nous allons séparer le problème en deux (conditions initiales adiabatiques et isocourbes) et trouver dans chacun des deux cas une équation différentielle du deuxième ordre. Pour ce faire, on remarque que le terme de droite dans la première équation d'Einstein se réécrit en fonction de $\delta S/S$:

$$\bar{\rho}_m \delta_m + \bar{\rho}_r \delta_r = \bar{\rho}_m \left(\delta_m - \frac{3}{4} \delta_r \right) + \left(\bar{\rho}_r + \frac{3}{4} \bar{\rho}_m \right) \delta_r = -\bar{\rho}_m \frac{\delta S}{S} + \frac{\bar{\rho}_r}{3c_S^2} \delta_r \quad (166)$$

Considérons maintenant (161) - c_S^2 (159):

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (1 + c_S^2) \dot{\phi} + \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 (1 - 3c_S^2) + c_S^2 k^2 \right) \phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m c_S^2 \frac{\delta S}{S} \quad (167)$$

On voit immédiatement que si $\delta S/S = \frac{3}{4} \delta_r - \delta_m = 0$, alors ϕ est solution d'une équation du deuxième ordre. Les conditions initiales adiabatiques aboutissent donc à deux solutions indépendantes. Comme on a en tout quatre solutions indépendantes, et que toute solution est la somme d'une partie adiabatique et d'une partie isocourbe, on en déduit que le nombre de solutions satisfaisant aux conditions initiales isocourbes est aussi de deux.

Pour résoudre l'équation du deuxième ordre, on effectue un changement de variable qui élimine le terme de friction. Après des calculs fastidieux, on se ramène à:

$$\ddot{u} + c_S^2 k^2 u - (\dot{b}/b) u = I \quad (168)$$

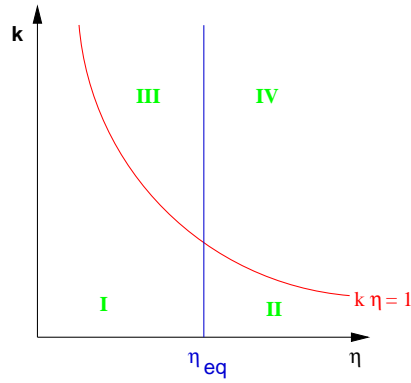


Figure 1: L'espace (k, η) peut être divisé en quatre régions. L'hyperbole marque la séparation entre les longueurs d'onde plus grandes et plus petites que le rayon de Hubble. La droite verticale représente la transition entre domination de la radiation et domination de la matière.

avec les définitions suivantes:

$$\phi \equiv 4\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})^{1/2} u = \left[4\pi G a^{-2} \left(2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \right]^{1/2} u \quad (169)$$

$$b = \frac{1}{a} \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho} + \bar{p}} \right)^{1/2} = \frac{\dot{a}}{a^2} \left[\frac{2}{3} \left(2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right) \right]^{-1/2} \quad (170)$$

$$I = (4\pi G)^{1/2} \left(2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{\ddot{a}}{a} \right)^{-1/2} a^3 c_S^2 \bar{\rho}_m \left(\frac{3}{4} \delta_r - \delta_m \right) \quad (171)$$

On peut trouver des solutions approchées à cette équation dans diverses limites de l'espace (k, η) , représentées sur la figure 6.4.2. Le but est de faire coïncider ces équations dans des intervalles communs de validité pour obtenir des solutions dans tout l'espace. Les conditions initiales sont données dans la région I, les perturbations observables actuellement sont dans IV (les plus grandes perturbations que l'on observe sont celles du CMB, dans un volume correspondant à l'horizon causal défini par rapport à l'instant du découplage, c'est-à-dire R_H). Le but est donc de relier l'amplitude des fluctuations dans ces deux régions. On voit que les modes tels que $k\eta_{eq} < 1$ traversent les régions I \rightarrow II \rightarrow IV, les autres traversent les régions I \rightarrow III \rightarrow IV. Or, dans la limite $k \rightarrow 0$, on obtient une solution analytique valable dans I et II. Dans les limites $\eta \ll \eta_{eq}$ et $\eta \gg \eta_{eq}$, on obtient des solutions analytiques qui ressemblent évidemment à celles des paragraphes 7.1.1 et 7.1.2. On pourra donc suivre toute l'évolution des modes qui traversent les régions I \rightarrow II \rightarrow IV. Pour les modes qui traversent I \rightarrow III \rightarrow IV il faudrait une solution valable dans III et IV, qui est plus difficile à trouver analytiquement; pour ces modes nous donnerons directement le résultat.

6.4.3 Perturbations adiabatiques

On part de conditions initiales adiabatiques, $\delta_m = \frac{3}{4}\delta_r$. On a vu que ces relations restent valables en-dehors du rayon de Hubble, du fait que les vitesses sont négligeables (du premier ordre en $k\eta$; on montre aussi qu'elles sont égales: $\theta_m - \theta_r = \dot{\delta}_m - 3/4 \dot{\delta}_r = 0$). Dans la région de départ I, l'équation (167) est identique à (119) et l'évolution de ϕ , δ_r et θ_r est donnée par (125 - 127). On a donc, en ne gardant que le mode quasi-isotrope:

$$\phi = C_1(\vec{k}) \quad (172)$$

$$\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m = -2C_1(\vec{k}) \quad (173)$$

$$\theta_r = \theta_m = -\frac{k^2\eta}{2}C_1(\vec{k}) \quad (174)$$

c'est-à-dire toutes les conditions initiales du système.

Pour des perturbations adiabatiques, on montre que le membre de droite des équations (167) et (168) (c'est-à-dire le terme de source) est toujours négligeable en très bonne approximation; En effet, dans I et II on a $\delta S/S = 0$, dans III on a $\rho_m \ll \rho_r$ et dans IV on a $c_S \ll 1$. On peut donc se contenter de résoudre l'équation homogène dans diverses limites.

Modes $k\eta_{eq} \ll 1$: passage de I à II

Ce passage correspond à la transition DR/DM (domination de la radiation / domination de la radiation) pour les modes en-dehors du rayon de Hubble. Il est décrit par l'équation (168) dans la limite $k \rightarrow 0$:

$$\ddot{u} - (\ddot{b}/b)u = 0 \quad (175)$$

Une solution évidente est $u \propto b$, l'autre s'obtient formellement en posant $u = fb$. On trouve $f \propto b^{-2}$. Par conséquent, la solution générale est:

$$u = \tilde{C}_1(\vec{k})b(\eta) \int_{\eta_1(\vec{k})}^{\eta} \frac{d\eta'}{b(\eta')^2} \quad (176)$$

Les deux constantes d'intégration sont $\tilde{C}_1(\vec{k})$ et $\eta_1(\vec{k})$. Mais l'on préfère écrire explicitement cette solution comme une combinaison linéaire de deux modes. En pratique, b^{-2} est toujours une fonction positive croissante de η , et il existe une infinité de valeurs $\eta_i \ll \eta$ telles que l'intégrale $\int_{\eta_i}^{\eta} b^{-2} d\eta'$ ne dépende pas de η_i . Alors:

$$u = \tilde{C}_1(\vec{k}) b(\eta) \left(\int_{\eta_i}^{\eta} \frac{d\eta'}{b(\eta')^2} - \int_{\eta_i}^{\eta_1} \frac{d\eta'}{b(\eta')^2} \right) \equiv \tilde{C}_1(\vec{k}) b(\eta) \int_{\eta_i}^{\eta} \frac{d\eta'}{b(\eta')^2} + \tilde{C}_2(\vec{k}) b(\eta) \quad (177)$$

Maintenant, les deux constantes d'intégration sont $\tilde{C}_1(\vec{k})$ et $\tilde{C}_2(\vec{k})$. En injectant la solution exacte $a = \frac{\eta^2}{4} + \sqrt{a_{eq}}\eta$ dans la définition de b , et en intégrant, on peut trouver une solution exacte pour u et ϕ à l'extérieur du rayon de Hubble. Mais il est plus simple de remarquer que si $a \propto \eta^\alpha$ (ce qui est vrai pour $\eta \ll \eta_{eq}$ ou $\eta \gg \eta_{eq}$), on a:

$$b = \left(\frac{3\alpha^2}{2\alpha(\alpha+1)} \right)^{1/2} a^{-1} \quad (178)$$

$$u = \tilde{C}_1 \left(\frac{2\alpha(\alpha+1)}{3\alpha^2} \right)^{1/2} \frac{a\eta}{2\alpha+1} + \tilde{C}_2 \left(\frac{3\alpha^2}{2\alpha(\alpha+1)} \right)^{1/2} a^{-1} \quad (179)$$

$$\phi = (4\pi\mathcal{G})^{1/2} \left\{ \tilde{C}_1 \sqrt{2/3} \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} + \tilde{C}_2 \sqrt{3/2} \alpha a^{-2} \eta^{-1} \right\} \quad (180)$$

On voit que pendant la domination de la matière ou du rayonnement, la solution en \tilde{C}_1 (resp. \tilde{C}_2) est le mode quasi-isotrope (resp. décroissant) déjà trouvé dans les sections 7.1.1 et 7.1.2. Pendant la domination de la radiation ($\alpha = 1$), en identifiant avec la condition initiale (172), on voit que $C_1 = (4\pi\mathcal{G})^{1/2} \sqrt{2/3} \frac{2}{5} \tilde{C}_1$. Pendant la transition, le mode quasi-isotrope subit une évolution dont les détails ne sont pas donnés par la solution ci-dessus, mais lorsque la matière domine ($\alpha = 2$) il redevient constant, tout en étant multiplié par un facteur $g(2)/g(1) = 9/10$, où $g(\alpha) \equiv (\alpha+1)/(2\alpha+1)$. Pendant ce temps, un mode décroissant est engendré, avec une évolution en η^{-5} ; il devient rapidement négligeable. La perturbation ϕ dans la région II vaut donc $\phi = \frac{9}{10} C_1$. Pour les perturbations de densité, la première équation d'Einstein montre que avant et après la transition $\eta \simeq \eta_{eq}$, on a:

$$\bar{\rho}_m |\delta_m| \ll \bar{\rho}_r |\delta_r| \Rightarrow 4\pi\mathcal{G} a^2 \rho_r \delta_r = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \phi \Rightarrow \delta_r = -2 \frac{\dot{a}^2}{a_{eq}} \phi = -2\phi = -2C_1 = \frac{4}{3} \delta_m \quad (181)$$

$$\text{et ensuite} \quad (182)$$

$$\bar{\rho}_m |\delta_m| \gg \bar{\rho}_r |\delta_r| \Rightarrow 4\pi\mathcal{G} a^2 \rho_m \delta_m = -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \phi \Rightarrow \delta_m = -2 \frac{\dot{a}^2}{a} \phi = -2\phi = -\frac{9}{5} C_1 = \frac{3}{4} \delta_r \quad (183)$$

On en déduit que pendant la transition, δ_m et δ_r sont tous deux multipliés par un facteur 6/5. Pour être complet, remarquons qu'un calcul exact de ϕ à l'extérieur du rayon de Hubble donne:

$$\phi = \frac{\xi+1}{(\xi+2)^3} \left[C_1(\vec{k}) \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5} \xi^2 + 3\xi + \frac{1}{1+\xi} + \frac{13}{3} \right) + C_2(\vec{k}) \frac{1}{\xi^3} \right] \quad (184)$$

avec $\xi \equiv \frac{\eta}{2\sqrt{a_{eq}}}$. En négligeant le mode décroissant, on a bien $\phi = C_1$ (resp. $\phi = \frac{9}{10} C_1$) pour $\xi \ll 1$ (resp. $\xi \gg 1$).

Modes $k\eta_{eq} \ll 1$: passage de II à IV

Ce passage correspond à l'entrée des modes dans le rayon de Hubble pendant la domination de la matière. Il s'agit de résoudre l'équation (167) dans la limite $c_S \rightarrow 0$, c'est-à-dire l'équation (132) du paragraphe 7.1.2. La solution pour ϕ est donc toujours donnée par (133) avec un mode quasi-isotrope constant et un mode décroissant. On a donc $\phi = \frac{9}{10} C_1$ à la fois dans II et IV. La perturbation δ_m est donnée par (134) et vaut dans la limite $k\eta \ll 1$:

$$\delta_m \rightarrow -\frac{9}{10} \frac{k^2 \eta^2}{6} C_1(\vec{k}) \quad (185)$$

La vitesse θ_m est donnée par (135) et tend vers:

$$\theta_m \rightarrow -\frac{9}{10} \frac{k^2 \eta}{3} C_1(\vec{k}) \quad (186)$$

On peut vérifier que les équations de continuité et d'Euler pour (δ_m, θ_m) sont bien vérifiées. Pour δ_r , on combine les équations de continuité et d'Euler en une équation du 2ième ordre:

$$\ddot{\delta}_r + \frac{k^2}{3}\delta_r = -\frac{4k^2}{3}\phi \quad (187)$$

La solution correctement normalisée (lorsque $k\eta \rightarrow 0$, on doit trouver $\dot{\delta}_r = 0$ et $\delta_r = \frac{4}{3}\delta_m = -\frac{8}{3}\phi$) est:

$$\delta_r = -4 \left(1 - \frac{1}{3} \cos(k\eta/\sqrt{3})\right) \phi = -\frac{18}{5} \left(1 - \frac{1}{3} \cos(k\eta/\sqrt{3})\right) C_1(\vec{k}) \quad (188)$$

Attention: il ne faut pas accorder trop d'importance à cette solution puisque notre description de la radiation n'est valable qu'avant le découplage.

Modes $k\eta_{eq} \gg 1$: passage de I à III

Pour les modes qui entrent dans le rayon de Hubble pendant la domination de la radiation, on trouve la solution pour u et ϕ en résolvant les équations homogènes (167,168) dans la limite $c_s^2 = \text{cte} = 1/3$. On retombe sur la solution (131) pour ϕ . On a donc dans la limite $k\eta \gg 1$:

$$\phi = 9(k\eta)^{-2} \cos(k\eta/\sqrt{3}) C_1(\vec{k}) \quad (189)$$

Donnons la solution pour δ_r dans la même limite, déduite de l'équation (161):

$$\delta_r = -6 \cos(k\eta/\sqrt{3}) C_1(\vec{k}) \quad (190)$$

Ces oscillations correspondent aux oscillations acoustiques des photons, observables en principe dans le CMB (fond diffus cosmologique), pour l'Univers simplifié que nous considérons ici (pour une description réaliste des anisotropies du fond diffus, voir les chapitres suivants). Enfin, on peut prouver que pendant cette période, δ_m reste approximativement constant. En utilisant les équations (159,161) et la solution (131) pour ϕ , on trouve $\rho_m \delta_m = 0$. En réalité, comme $\rho_m \delta_m$ est très petit par rapport aux autres termes des équations (159,161), on ne peut extraire δ_m qu'en calculant la solution exacte pour ϕ , avec la véritable valeur de c_s^2 qui est légèrement supérieure à $1/3$. Ce calcul n'est pas abordé ici.

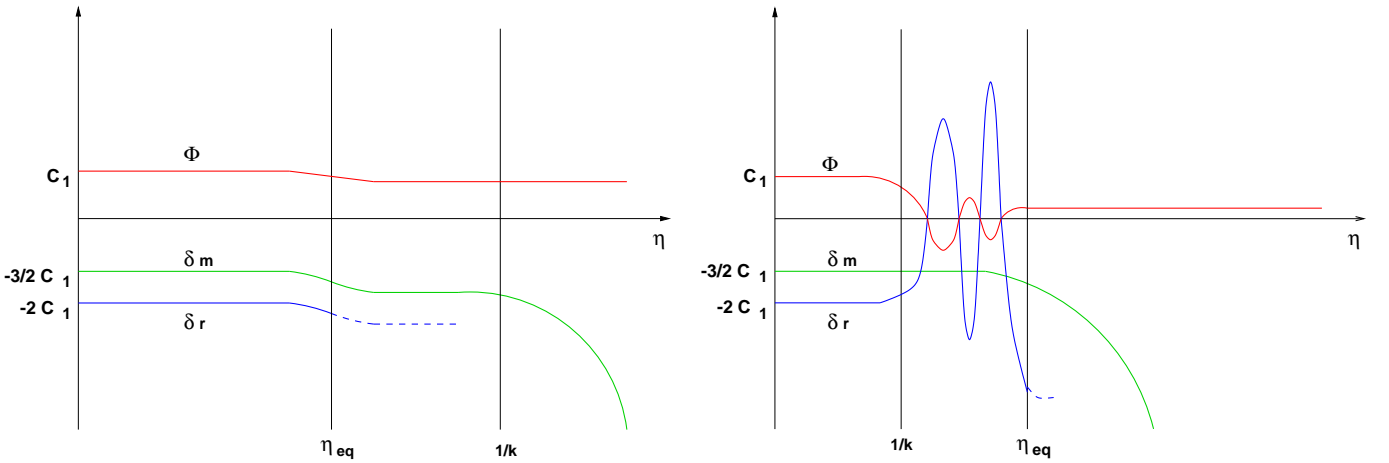


Figure 2: Evolution schématique de $(\phi, \delta_m, \delta_r)$ avec des conditions initiales adiabatiques, pour des modes tels que $k\eta_{eq} \ll 1$ (à gauche) et $k\eta_{eq} \gg 1$ (à droite). L'échelle est fixée par la constante d'intégration $C_1(\vec{k})$ (choisie positive arbitrairement). La croissance finale de $|\delta_m|$ est responsable de la formation des structures, et les oscillations de δ_r sur le schéma de droite sont responsables des pics acoustiques dans le spectre des anisotropies du fond diffus. Les équations utilisées dans cette section ne donnent pas accès à δ_r pendant la domination de la matière.

Modes $k\eta_{eq} \gg 1$: passage de III à IV

L'évolution des modes au moment de la transition DR/DM et à l'intérieur du rayon de Hubble aboutit à des calculs difficiles et fastidieux. Lorsque c_s varie lentement, on peut utiliser une approximation WKB pour résoudre

$$\ddot{u} + k^2 c_s^2(\eta) u = 0 \quad (191)$$

où la condition initiale est donnée par (189) lorsque $\eta \ll \eta_{eq}$ et $c_s^2 = 1/3$. Mais le plus délicat est de trouver la solution lorsque c_s devient rapidement très petit devant 1, c'est-à-dire au moment du découplage η_r , peu après l'égalité. On montre en première approximation que pendant le découplage, les oscillations "gèlent", avec une phase indépendante de k . L'amplitude reste à peu près proportionnelle à k^{-2} , comme pendant les oscillations (189), mais avec en plus un facteur en $\ln(k)$:

$$\phi \propto k^{-2} \ln(k) C_1(\vec{k}) \quad (192)$$

Le résultat essentiel est que dans la région IV, les modes en-dehors du rayon de Hubble vérifient $\phi(\vec{k}) \propto C_1(\vec{k})$, tandis que pour les autres $\phi(\vec{k}) \propto k^{-2} \ln(k) C_1(\vec{k})$. En effet, ϕ est constant pour tous les modes et dans tous les régimes, sauf pour les modes à l'intérieur du rayon de Hubble pendant la domination de la radiation (région III): dans ce dernier cas l'amplitude de ϕ (moyennée sur une oscillation) décroît en $(k\eta)^{-2}$. Plus k est grand, plus le mode séjourne longtemps dans la région III, et l'effet de suppression final est en $k^{-2} \ln(k)$.

L'échelle qui donne la transition entre les deux comportements asymptotiques est:

$$k_{eq} \equiv \eta_{eq}^{-1} = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^{-1} a_{eq}^{-1/2} \quad (193)$$

Calculons a_{eq} et a_0 en fonction de grandeurs observables. Les photons ayant un spectre de corps noir, leur densité est reliée à leur température:

$$\bar{\rho}_r = \frac{\pi^2}{15} T_0^4 = \frac{3}{8\pi G} a_{eq} a_0^{-4} \quad (194)$$

où $T_0 = 2.73$ K est la température du fond diffus. La valeur de a_0 se déduit de la valeur actuelle du paramètre de Hubble en remarquant que la densité actuelle de matière est égale à la densité critique:

$$\bar{\rho}_m(\eta_0) = \rho_c(\eta_0) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3a_0^{-3}}{8\pi G} \Rightarrow a_0 = H_0^{-2/3} \quad (195)$$

où $H_0 = 100h$ km s⁻¹Mpc⁻¹ = (2997.9)⁻¹h Mpc⁻¹. On en déduit que k_{eq} correspond actuellement à la longueur d'onde λ_{eq} avec:

$$2\pi\lambda_{eq}^{-1} = \frac{k_{eq}}{a_0} = \frac{3}{2(\sqrt{2}-1)\pi} \left(\frac{5}{8\pi G}\right)^{1/2} \left(\frac{H_0}{T_0}\right)^2 = 9.67 \times 10^{-2} h^2 \left(\frac{2.7\text{K}}{T_0}\right)^2 \text{Mpc}^{-1} \quad (196)$$

(Rappelons que comme k_{eq} est un mode de Fourier comobile, la valeur physique actuelle du nombre d'onde est k_{eq}/a_0 , de dimension 1/longueur. Dans la littérature, on définit souvent le facteur d'échelle de manière à obtenir $a_0 = 1$; ainsi, à l'heure actuelle, les quantités physiques et comobiles se confondent). T_0 étant fixé par les mesures actuelles à plus d'1% près, on voit que k_{eq}/a_0 dépend simplement de h^2 . L'expression ci-dessus ne tient pas compte de la présence de neutrinos; avec trois familles de neutrinos, il faut multiplier par un facteur 1.68^{-1/2}.

Pour interpoler entre les deux asymptotes $\phi = 9/10 C_1(\vec{k})$ et $\phi \propto k^{-2} \ln(k) C_1(\vec{k})$, une résolution numérique est indispensable. Nous allons donner la solution à l'aide d'une fonction dite "fonction de transfert" telle que:

$$\phi(\vec{k}, \eta_0) = \frac{9}{10} T(k) \phi(\vec{k}, \eta_i) \quad (197)$$

où η_i est un instant initial (tel que tous les modes considérés soient encore dans la région I). D'après ce qui précède, cette fonction a une asymptote $T(k) = 1$ (resp. $T(k) \propto k^{-2} \ln(k)$) quand $k \ll \eta_{eq}^{-1}$ (resp. $k \gg \eta_{eq}^{-1}$), et le spectre de puissance vaut:

$$P(k) = \left(\frac{9}{10} \frac{2k^2}{3H_0^2 a_0^2}\right)^2 T(k)^2 < |\phi(\vec{k}, \eta_i)|^2 > \quad (198)$$

Un fit analytique donne (Bardeen, Bond, Kaiser & Szalay 86):

$$T(q) = \frac{\ln(1 + 2.34 q)}{2.34q} [1 + 3.89 q + (16.1 q)^2 + (5.46 q)^3 + (6.72 q)^4]^{-1/4} \quad (199)$$

avec $q \equiv \frac{k/a_0}{h^2 \text{Mpc}^{-1}}$. Les asymptotes sont donc $T = 1$ et $T = \frac{\ln(2.34 q)}{(2.34 \times 6.72) q^2}$, soit pour le spectre de puissance $P(k) \propto k^n$ et $P(k) \propto k^{n-4} \ln(k)$.

6.4.4 Perturbations isocourbes

Nous cherchons maintenant deux autres solutions indépendantes du système (159 - 165) telles que $\delta \rightarrow 0$ lorsque $\eta \ll \eta_{eq}$. Pour un mode en-dehors du rayon de Hubble, d'après (159),

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \phi - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = 4\pi G a^2 \delta \rho \quad (200)$$

En regardant l'équation homogène, on voit immédiatement qu'il existe une solution telle que $\delta\rho = 0$ en-dehors du rayon de Hubble: c'est $\phi \propto a^{-1}$. Cette perturbation est bien par définition une perturbation d'entropie, et elle correspond à un ϕ divergent dans l'Univers primordial. Comme dans le cas des perturbations adiabatiques, ce mode pourra être négligé en raison de l'homogénéité et de l'isotropie de l'Univers primordial.

Pour trouver l'autre solution dans la région I, il suffit d'écrire l'équation (167) dans la limite $k \rightarrow 0$ et $c_s^2 \rightarrow 1/3$:

$$\ddot{\phi} + \frac{4}{\eta}\dot{\phi} = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m c_s^2 \frac{\delta S}{S} = \frac{1}{2\sqrt{a_{eq}}\eta} \frac{\delta S}{S} \quad (201)$$

Comme $\frac{\delta S}{S}$ est constant hors rayon de Hubble, une solution particulière évidente de l'équation ci-dessus est:

$$\phi = \frac{\eta}{8\sqrt{a_{eq}}} \frac{\delta S}{S}. \quad (202)$$

Cette solution est bien une perturbation isocourbe, car d'après (200), $\delta\rho \propto \eta^{-3}$ et $\delta \simeq \delta\rho/\bar{\rho}_r \propto \eta$; donc on a bien $\delta \rightarrow 0$ dans l'Univers primordial. Récapitulons l'ensemble des solutions dans la région I:

$$\phi \propto \begin{cases} \text{cte} & \text{adiabatique quasi-isotrope} & \delta S = 0 \\ \eta^{-3} & \text{adiabatique décroissant} & \delta S = 0 \\ \eta & \text{isocourbe croissant} & \delta \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0 \\ \eta^{-1} & \text{isodensité décroissant} & \delta = 0 \text{ (par abus de langage "isocourbe décroissant")} \end{cases} \quad (203)$$

En ne gardant que le mode isocourbe croissant, en définissant la constante d'intégration C_3 , égale à la perturbation d'entropie, et finalement en utilisant (159, 161), on trouve le comportement suivant pour les perturbations dans la région I:

$$\frac{\delta S}{S} = C_3(\vec{k}) \quad (204)$$

$$\phi = \frac{\eta}{8\sqrt{a_{eq}}} C_3(\vec{k}) \quad (205)$$

$$\delta_r = \frac{\eta}{2\sqrt{a_{eq}}} C_3(\vec{k}) \quad (206)$$

$$\delta_m = -C_3(\vec{k}) \quad (207)$$

On a $\delta S/S = -\delta_m = \text{cte}$ car tant que $\eta \ll \eta_{eq}$, on a $\frac{\eta}{\sqrt{a_{eq}}} \ll 1$ et $|\delta_r| \ll |\delta_m|$. Cette dernière inégalité était prévisible; en effet, il est nécessaire que δ_r tende vers zéro dans l'Univers primordial pour obtenir $\delta \rightarrow 0$:

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}_r + \bar{\rho}_m} \simeq \delta_r + \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} \delta_m = \frac{\eta}{2\sqrt{a_{eq}}} C_3(\vec{k}) - \frac{\eta}{\sqrt{a_{eq}}} C_3(\vec{k}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } \eta \rightarrow 0 \quad (208)$$

Passage de I à II: mode $k\eta_{eq} \ll 1$ et $k \rightarrow 0$

Pour trouver une solution non-adiabatique des équations du mouvement qui soit valable à la fois dans I et II, remarquons que l'équation (167) se réécrit (dans la limite $k \rightarrow 0$):

$$\ddot{\phi} - \frac{4\dot{\bar{\rho}}_r + 3\dot{\bar{\rho}}_m}{4\bar{\rho}_r + 3\bar{\rho}_m} \dot{\phi} + \left(\frac{8\pi\mathcal{G}}{3} a^2 \frac{\bar{\rho}_r \bar{\rho}_m}{4\bar{\rho}_r + 3\bar{\rho}_m} \right) \phi = \frac{16\pi\mathcal{G}}{3} a^2 \frac{\bar{\rho}_r \bar{\rho}_m}{4\bar{\rho}_r + 3\bar{\rho}_m} \frac{\delta S}{S} \quad (209)$$

Pour parvenir à ce résultat nous avons effectué les étapes intermédiaires:

$$4\dot{\bar{\rho}}_r + 3\dot{\bar{\rho}}_m = -\frac{\dot{a}}{a}(16\bar{\rho}_r + 9\bar{\rho}_m) \quad (210)$$

$$1 + c_s^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{16\bar{\rho}_r + 9\bar{\rho}_m}{4\bar{\rho}_r + 3\bar{\rho}_m} \right) \quad (211)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{8\pi\mathcal{G}}{3} a^2 \bar{\rho}_r \quad (212)$$

$$3c_s^2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi\mathcal{G}}{3} a^2 \frac{4\bar{\rho}_r(\bar{\rho}_r + \bar{\rho}_m)}{4\bar{\rho}_r + 3\bar{\rho}_m} \quad (213)$$

Cette réécriture permet de voir une nouvelle solution exacte, valable hors rayon de Hubble même pendant la transition DR/DM:

$$\phi = 2 \frac{\delta S}{S} \quad (214)$$

Cette solution n'est ni adiabatique ($\frac{\delta S}{S} \neq 0$), ni isocourbe ($\delta\rho \propto \eta^{-4}$ et $\delta \simeq \text{cte}$). C'est en fait une combinaison linéaire du mode adiabatique quasi-isotrope et du mode isocourbe croissant. Pour le vérifier, retranchons à cette solution un mode adiabatique quasi-isotrope, donné par la solution exacte (184), en choisissant le coefficient C_1 de manière à annuler la partie constante. Il reste:

$$\phi = 2\frac{\delta S}{S} - 2\frac{\delta S}{S} \frac{\xi+1}{(\xi+2)^3} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5}\xi^2 + 3\xi + \frac{1}{1+\xi} + \frac{13}{3} \right) \quad (215)$$

$$= \frac{1}{5}\xi \frac{\xi^2 + 6\xi + 10}{(\xi+2)^3} \frac{\delta S}{S} \quad (216)$$

avec $\xi \equiv \frac{\eta}{2\sqrt{a_{eq}}}$. Lorsque $\eta \rightarrow 0$, on a $\phi = \frac{1}{8}\frac{\eta}{\sqrt{a_{eq}}}\frac{\delta S}{S}$, et on retrouve bien la solution (202): donc (216) décrit bien le mode isocourbe croissant à tout instant. Pendant la domination de la matière, lorsque $\eta \gg \eta_{eq}$, on trouve

$$\phi = \frac{1}{5}\frac{\delta S}{S} = \frac{1}{5}C_3(\vec{k}) \quad (217)$$

Donc ϕ devient asymptotiquement constant, comme pour le mode adiabatique croissant. La perturbation δ_m est donnée par (159) avec $\bar{\rho}_m|\delta_m| \gg \bar{\rho}_r|\delta_r|$:

$$\delta_m = -2\phi = -\frac{2}{5}\frac{\delta S}{S} = -\frac{2}{5}C_3(\vec{k}) \quad (218)$$

Comme $\frac{\delta S}{S} = \frac{3}{4}\delta_r - \delta_m$, on en déduit:

$$\delta_r = \frac{4}{5}\frac{\delta S}{S} = \frac{4}{5}C_3(\vec{k}) \quad (219)$$

Mode $k\eta_{eq} \ll 1$: passage de II à IV

Pour étudier la rentrée des modes dans le rayon de Hubble pendant la domination de la matière, il faut résoudre (167) dans la limite $c_s \rightarrow 0$. On trouve la même équation que pour des perturbations adiabatiques, et la solution est toujours donnée par (133,134):

$$\phi = \frac{1}{5}C_3(\vec{k}) \quad (220)$$

$$\delta_m = -\frac{1}{5} \left(2 + \frac{k^2\eta^2}{6} \right) C_3(\vec{k}) \quad (221)$$

Pour δ_r , on trouve la solution de (187) avec la condition initiale (219):

$$\delta_r = -4 \left(1 - 2 \cos(k\eta/\sqrt{3}) \right) \phi = -\frac{4}{5} \left(1 - 2 \cos(k\eta/\sqrt{3}) \right) C_3(\vec{k}) \quad (222)$$

Rappelons à nouveau que cette dernière solution ne décrit pas la réalité après le découplage des photons.

Mode $k\eta_{eq} \gg 1$: passage de I à III

Pour étudier la rentrée des modes dans le rayon de Hubble pendant la domination de la radiation, il faut résoudre l'équation (168) dans la limite $c_s^2 = \frac{1}{3}$, avec les variables:

$$\phi = 4\pi\mathcal{G} \left(\frac{4}{3}\bar{\rho}_r \right)^{1/2} u = 2\sqrt{\frac{2\pi\mathcal{G}}{a_{eq}}}\eta^{-2}u \quad (223)$$

$$b = \sqrt{\frac{3}{4}} a^{-1} \propto \eta^{-1} \quad (224)$$

$$I = \frac{\eta}{4\sqrt{2\pi\mathcal{G}}} \frac{\delta S}{S} \quad (225)$$

L'équation (168) devient donc:

$$\ddot{u} + \left(k^2 c_s^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) u = \frac{\eta}{4\sqrt{2\pi\mathcal{G}}} \frac{\delta S}{S} \quad (226)$$

Nous avons déjà trouvé la solution générale de l'équation homogène, qui est donnée en fonction de ϕ par (131). Pour trouver une solution particulière, il nous faut connaître l'évolution de $\frac{\delta S}{S}$. Regardons s'il existe des solutions de tout le système (159 - 165) telles que:

$$\frac{\delta S}{S} = \text{cte} = -\delta_m \quad \text{et} \quad |\delta_m| \gg |\delta_r| \quad (227)$$

Avec cet ansatz, on peut écrire une solution particulière de (226):

$$u = \frac{1}{4}(2\pi\mathcal{G})^{-1/2}(c_s k)^{-3} \left(kc_s \eta + \frac{2}{kc_s \eta} \right) \frac{\delta S}{S} \quad (228)$$

Par conséquent, la solution générale de (226) est:

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{1}{2} a_{eq}^{-1/2} (c_s k)^{-3} \eta^{-2} \left(kc_s \eta + \frac{2}{kc_s \eta} \right) \frac{\delta S}{S} \\ & + \eta^{-3} \left\{ A(\vec{k}) [\sin(kc_s \eta) - kc_s \eta \cos(kc_s \eta)] + B(\vec{k}) [\cos(kc_s \eta) + kc_s \eta \sin(kc_s \eta)] \right\} \end{aligned} \quad (229)$$

La valeur des constantes d'intégration qui correspond à $\phi \rightarrow \frac{\eta}{8\sqrt{a_{eq}}} \frac{\delta S}{S}$ lorsque $k\eta \rightarrow 0$ est:

$$A(\vec{k}) = 0 \quad (230)$$

$$B(\vec{k}) = -a_{eq}^{-1/2} (c_s k)^{-4} \frac{\delta S}{S} = -a_{eq}^{-1/2} (c_s k)^{-4} C_3(\vec{k}) \quad (231)$$

Par conséquent, la solution asymptotique pour $k\eta \gg 1$ et $\eta < \eta_{eq}$ est donnée par:

$$\phi = a_{eq}^{-1/2} (c_s k)^{-3} \eta^{-2} \sin(kc_s \eta) C_3(\vec{k}) \quad (232)$$

La solution asymptotique pour δ_r se déduit immédiatement de (161):

$$\delta_r = -2a_{eq}^{-1/2} (c_s k)^{-1} \sin(kc_s \eta) C_3(\vec{k}) \quad (233)$$

Comme nous considérons les modes tels que $k \gg k_{eq} \simeq a_{eq}^{-1/2}$ (193), l'amplitude de δ_r est bien négligeable par rapport à $|\delta_m| = |C_3|$, et l'ansatz (227) est satisfaite: la solution qui en découle est donc bien la solution unique du système avec la conditions initiale isocourbe.

Comparons cette solution avec la solution correspondante pour des perturbations adiabatiques. Dans les deux cas, ϕ et δ_r oscillent à l'intérieur du rayon de Hubble pendant la domination de la radiation, avec une amplitude constante pour δ_r et un amortissement en η^{-2} pour ϕ . Cependant, il y a deux différences notables: la dépendance en k est différente, puisque (en moyenne sur une oscillation) $\phi \propto k^{-3} C_3(\vec{k})$ et $\delta_r \propto k^{-1} C_3(\vec{k})$ (au lieu de $k^{-2} C_1(\vec{k})$ et $C_1(\vec{k})$). Deuxièmement, il y a un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre les deux cas: par exemple, $\phi \propto \sin(kc_s \eta)$ au lieu de $\cos(kc_s \eta)$. Ceci est fondamental pour les anisotropies du CMB, car la phase y est directement observable: elle donne l'échelle angulaire des pics acoustiques (comme nous le verrons plus tard, les observations indiquent des perturbations adiabatiques, tout au moins majoritairement).

Mode $k\eta_{eq} \gg 1$: passage de III à IV

A nouveau, nous éviterons ce calcul long et difficile, et nous donnerons le directement le résultat à l'aide d'une fonction de transfert. La perturbation de la métrique ϕ n'étant pas constante dans la région I, le spectre primordial des fluctuations isocourbes est défini en fonction de $\delta S/S$, ou de façon équivalente, en fonction de $\delta_m = -\delta S/S$ (à un instant initial $\eta_i \ll \eta_{eq}$):

$$\langle \delta_m(\vec{k}, \eta_i) \delta_m(\vec{k}', \eta_i)^* \rangle = \langle C_3(\vec{k}) C_3(\vec{k}')^* \rangle = A k^{n-4} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (234)$$

A nouveau, $n = 1$ correspond par définition à un spectre primordial invariant d'échelle. La fonction de transfert T est définie par:

$$\phi(\vec{k}, \eta_0) = -\frac{1}{5} T(k) \delta_m(\vec{k}, \eta_i) \quad (235)$$

En effet, on sait que pour les modes $k\eta_{eq} \ll 1$, on a $\phi(\vec{k}, \eta_0) = \frac{1}{5} C_3(\vec{k}) = -\frac{1}{5} \delta_m(\vec{k}, \eta_i)$. La définition de T est donc telle que $T(k) = 1$ pour $k \ll k_{eq}$. Finalement, d'après (138), le spectre de puissance s'écrit:

$$P(k) = \left(\frac{1}{5} \frac{2k^2}{3H_0^2 a_0^2} \right)^2 T(k)^2 \langle |\delta_m(\vec{k}, \eta_i)|^2 \rangle \quad (236)$$

Un fit analytique donne (Efstathiou & Bond 86):

$$T(q) = \left[1 + \left(15.6q + (0.9q)^{3/2} + (5.8q)^2 \right)^{1.24} \right]^{-1/1.24} \quad (237)$$

avec $q \equiv \frac{k/a_0}{h^2 \text{Mpc}^{-1}}$. Les asymptotes sont donc $T = 1$ et $T = (5.8q)^{-2}$, soit pour le spectre de puissance $P(k) \propto k^n$ et $P(k) \propto k^{n-4}$.

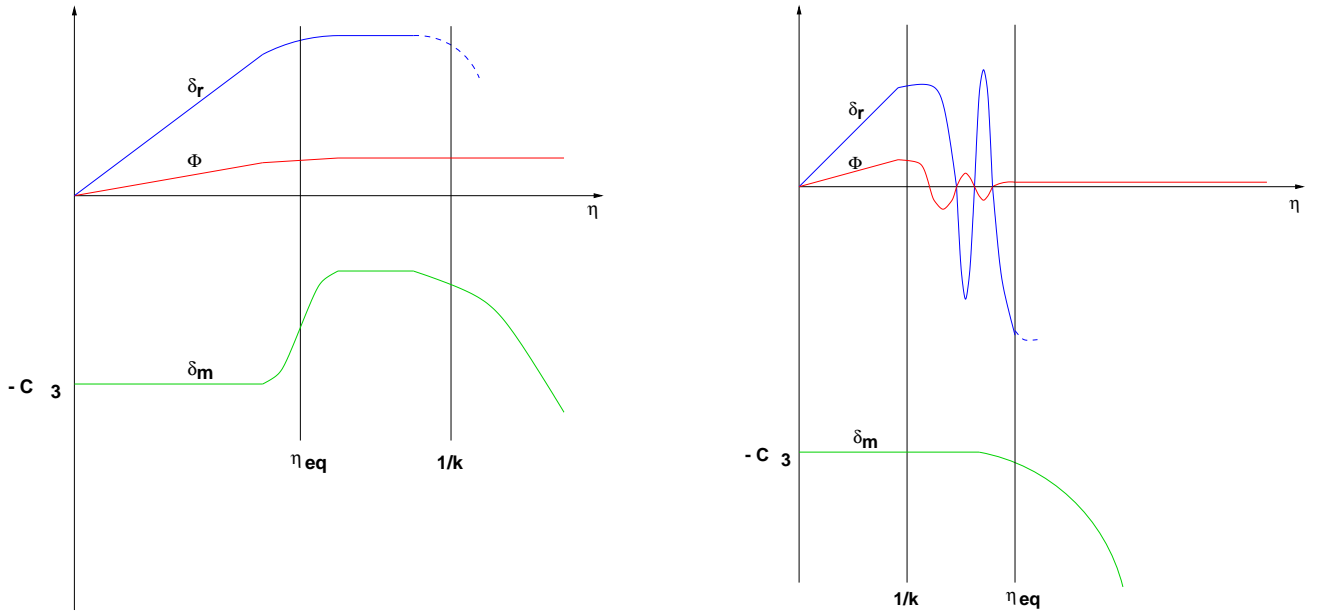


Figure 3: Evolution schématique de $(\phi, \delta_m, \delta_r)$ avec des conditions initiales isocourbes, pour des modes tels que $k\eta_{eq} \ll 1$ (à gauche) et $k\eta_{eq} \gg 1$ (à droite). Dans le premier cas, l'ordre de grandeur des perturbations au voisinage de l'égalité et de l'entrée dans le rayon de Hubble est donné par la constante d'intégration $C_3(\vec{k})$ (choisie positive arbitrairement). Dans le deuxième cas, $|\delta_m|$ est d'ordre $C_3(\vec{k})$, mais $|\phi|$ et $|\delta_r|$ restent beaucoup plus petits (d'ordre $C_3(\vec{k})/(k\eta_{eq})$). La croissance finale de $|\delta_m|$ est responsable de la formation des structures, et les oscillations de δ_r sur le schéma de droite sont responsables des pics acoustiques dans le spectre des anisotropies du fond diffus. Les équations utilisées dans cette section ne donnent pas accès à δ_r pendant la domination de la matière.

6.5 Comparaison avec les observations

En préparation, ainsi que les sections suivantes:

7 Couplage photons-baryons, anisotropies du fond diffus

8 Influence des neutrinos

9 Influence d'une constante cosmologique

10 Génération des fluctuations par l'inflation